

① Temos  $f(n) = O(h(n))$  e  $g(n) = O(h(n))$ .  
Queremos mostrar que  $f(n) + g(n) = O(h(n))$ .

Precisamos encontrar constantes positivas  $c$  e  $n_0$  tais que:

$$f(n) + g(n) \leq c \cdot h(n), \quad \forall n \geq n_0.$$

Como  $f(n) = O(h(n))$ , existem constantes positivas  $c_1$  e  $n_1$  tais que

$$f(n) \leq c_1 \cdot h(n), \quad \forall n \geq n_1 \quad (*)$$

e como  $g(n) = O(h(n))$  então existem constantes positivas  $c_2$  e  $n_2$  tais

$$g(n) \leq c_2 \cdot h(n), \quad \forall n \geq n_2 \quad (**)$$

Logo, somando  $(*)$  e  $(**)$ , temos

$$f(n) + g(n) \leq \underline{(c_1 + c_2)} \cdot h(n), \quad \forall n \geq \max(n_1, n_2) \leq n_1 + n_2.$$

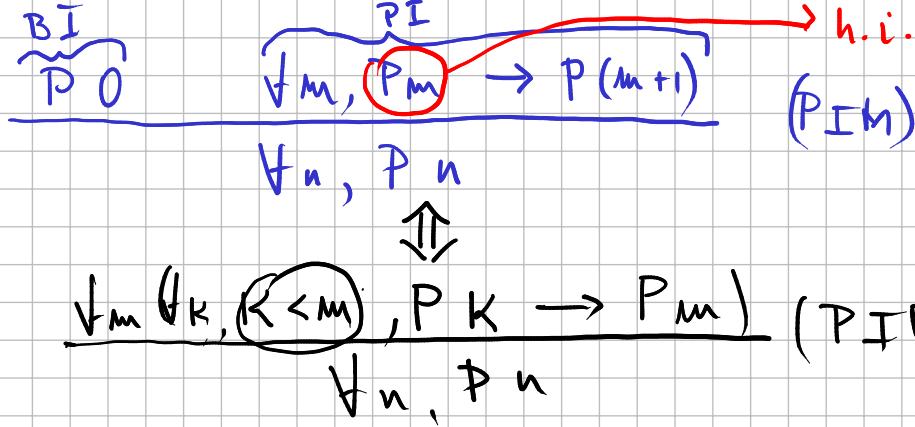
$$\text{Tome } c = c_1 + c_2 \quad \text{e } n_0 = \max(n_1, n_2).$$

□

- ) Faça a análise assintótica do melhor caso;
- ) Faça a análise assintótica do pior caso;
- ) Mostre que este algoritmo satisfaz a seguinte propriedade:

Seja  $A[1..n]$  um vetor ordenado de inteiros distintos. Mostre que se a chave  $key$  não ocorre em  $A[1..n]$ , então  $\text{BinarySearch}(A[1..n], 1, n, key)$  retorna o valor -1.

Sejam  $n = |A|$ ,  $1 \leq low \leq n$ ,  $1 \leq high \leq n$ .  
Se  $key$  não ocorre em  $A[low, high]$   
então  $\text{BS}(A, low, high, key)$  retorna -1



Mostre-nos um resultado mais geral:

Sejam  $n = |A|$ ,  $1 \leq low \leq n$ ,  $1 \leq high \leq n$ .

Se Key não ocorre em  $A[low, high]$  então  $BS(A, low, high, key)$  retorna  $-1$

Indução em  $high - low + 1 = k$ .

- BASE:  $k = 0 \rightarrow high - low + 1 = 0$   
 $\rightarrow high = low - 1$   
 $\Rightarrow high < low$

e portanto pela linha 1,  $BS$  retorna  $-1$ .  $high - low + 1 > 0$

- PI:  $k > 0$ :  $low \leq high$ .  $\Leftarrow$

Temos 2 casos:  $mid = \lfloor \frac{high + low}{2} \rfloor$

①  $Key > A[mid]$ :

Neste caso, faz que  $high - (mid + 1) + 1$

$< high - low + 1 = k$ , podemos aplicar a h.i. que nos diz se Key não ocorre em  $A[mid+1, high]$

então  $BS(A, mid+1, high, key)$  retorna

$-1$ . Como Key não ocorre em  $A[1..n]$  por hipótese então

também não ocorre em  
[mid+1, high]  
e portanto BS(A, low, high, Key)  
retorna -1.

② Análogo.

$$\text{high} - \text{low} + 1 > 0$$

$$\text{low} < \text{high} + 1 \Rightarrow$$

$$\text{low} \leq \text{high}.$$