① Temos $f(n) = O(h(n))$ e $g(n) = O(h(n))$.
Queremos mostrar que $f(n) + g(n) = O(h(n))$.

Precisamos encontrar constantes positivas c e n_0 tais que:

$$\boxed{f(n) + g(n) \leq c \cdot h(n), \quad \forall n \geq n_0.}$$

Como $f(n) = O(h(n))$, existem constantes positivas c_1 e n_1 tais que

$$f(n) \leq c_1 \cdot h(n), \quad \forall n \geq n_1 \quad (*)$$

e como $g(n) = O(h(n))$ então existem constantes positivas c_2 e n_2 tais que $g(n) \leq c_2 h(n)$, $\forall n \geq n_2$ $(**)$

Logo, somando $(*)$ e $(**)$, temos

$$f(n) + g(n) \leq \underline{(c_1 + c_2)} \cdot h(n), \quad \forall n \geq \max(n_1, n_2)$$

$\leq n_1 + n_2$.

Tome $c = c_1 + c_2$ e $n_0 = \max(n_1, n_2)$.

$\boxtimes$

) Faça a análise assintótica do melhor caso;

) Faça a análise assintótica do pior caso;

) Mostre que este algoritmo satisfaz a seguinte propriedade:

> Seja $A[1..n]$ um vetor ordenado de inteiros distintos. Mostre que se a chave *key* não ocorre em $A[1..n]$, então BinarySearch$(A[1..n], 1, n, key)$ retorna o valor -1.

Sejam $n = |A|$, $1 \leq low \leq n$, $1 \leq high \leq n$.
Se key não ocorre em $A[low, high]$
então BS(A, low, high, key) retorna -1

$$\frac{\overset{BI}{P\,0} \qquad \overset{PI}{\forall m, \left(P\,m \to P(m+1)\right)}}{\forall n, P\,n} \quad (PIM)$$

h.i.

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\forall m\, (\forall k, k < m, P\,k \to P\,m)}{\forall n, P\,n} \quad (PIF)$$

Mostraremos um resultado mais geral:

Sejam $n = |A|$, $1 \leq low \leq n$, $1 \leq high \leq n$.
Se Key não ocorre em A[low, high]
então BS(A, low, high, Key) retorna -1

Indução em $high - low + 1 = K$.

- BASE: $K = 0 \to high - low + 1 = 0$
$\to high = low - 1$
$\to high < low$

e portanto pela linha 1, BS retorna -1.

$high - low + 1 > 0$

$\Downarrow$

- PI: $K > 0$: $low \leq high$.

Temos 2 casos: $mid = \left\lfloor \frac{high + low}{2} \right\rfloor$

① Key > A[mid]:
Neste caso, já que $high - (mid + 1) + 1$
$< high - low + 1 = K$, podemos aplicar a h.i. que nos diz se Key não ocorre em A[mid+1, high]
então BS(A, mid+1, high, Key) retorna -1. Como Key não ocorre em A[1..n] por hipótese então

também não ocorre em
A[mid+1, high]
, e portanto BS(A, low, high, Key)
retorna −1.

(2) Análogo.

$high - low + 1 > 0$

$low < high + 1 \implies$

$low \leq high.$