Atividade 3. Mostre que $\frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$.

Solução: Podemos resolver este exercício de duas formas distintas:

① Podemos utilizar limites. Neste caso, precisamos mostrar que $\frac{n(n-1)}{2}$ cresce mais lentamente que n^2. Ou seja, que o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}$ é finito.

(ver lema 26 do pdf da aula 06).

De fato,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n} - \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

② Alternativamente, podemos mostrar que existem constantes positivas c e n_0 tais que $\frac{n(n-1)}{2} \leq c.n^2$, $\forall n \geq n_0$. De fato,

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \leq \frac{n^2}{2}, \quad \forall n \geq 0.$$

Então tomando $c = 1/2$ e $n_0 = 0$, a desigualdade é satisfeita. $\boxtimes$