Atividade 04: Resolva a recorrência

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Solução: Utilizaremos o método da substituição já que o Teorema Mestre não se aplica neste caso. Temos

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2 \cdot \underline{T(n-1)} + 1 \\
&= 2 \cdot \left(2 \cdot T(n-2) + 1 \right) + 1 \\
&= 2^2 \cdot \underline{T(n-2)} + 2 + 1 \\
&= 2^2 \cdot \left(2 \cdot T(n-3) + 1 \right) + 2 + 1 \\
&= 2^3 \cdot T(n-3) + 2^2 + 2 + 1 \\
&= \cdots \\
&= 2^{n-1} \cdot T(1) + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Utilizaremos indução para mostrar que $T(n) = 2^n - 1$ é solução da recorrência dada.

BI $(n = 1)$: Trivial pois, $T(1) = 2^1 - 1 = 1$.

PI $(n>1)$: $T(n) = 2 \cdot \underline{T(n-1)} + 1$

$$\overset{(h.i.)}{=} 2 \cdot \left(2^{n-1} - 1\right) + 1$$

$$= 2^{n} - 2 + 1 = 2^{n} - 1 \qquad \blacksquare$$