Atividade 05: Resolva a recorrência

$T(n) = 2.T(n/2) + n.\lg n.$

Solução: Inicialmente vamos tentar aplicar o TM.
Precisamos comparar $n.\lg n$ com $n^{\log_2^2} = n$. Neste caso, $n.\lg n \geq n$, mas $n.\lg n$ não é polinomialmente maior do que n, ou seja, $n.\lg n \neq \Omega(n^{1+\varepsilon})$ para algum $\varepsilon > 0$. De fato, se $n.\lg n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$ então existiriam constantes positivas c e n_0 tais que $n.\lg n \geq c.n^{1+\varepsilon}$, $\forall n \geq n_0 \iff$

$\lg n \geq c.n^{\varepsilon}$, $\forall n \geq n_0$, mas $\lg n = o(n^{\alpha}), \forall \alpha > 0$

(veja o teorema 40 no pdf da aula 06).

Logo o TM não se aplica. Utilizaremos o método da substituição para resolver esta recorrência. Temos

$T(n) = 2.T(n/2) + n.\lg n. \quad (*)$

Considere $n = 2^k$, ou seja, vamos resolver $(*)$ para o caso em que n é uma potência de 2. Assim $(*)$ pode ser reescrita como

$T(2^k) = 2.\underline{T(2^{k-1})} + k.2^k \quad (**)$

$$= 2\left(2 \cdot T(2^{k-2}) + (k-1) \cdot 2^{k-1}\right) + k \cdot 2^k$$

$$= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + (k-1) \cdot 2^k + k \cdot 2^k$$

$$= 2^2 \cdot \left(2 \cdot T(2^{k-3}) + (k-2) \cdot 2^{k-2}\right) + (k-1) \cdot 2^k + k \cdot 2^k$$

$$= 2^3 \cdot T(2^{k-3}) + (k-2) \cdot 2^k + (k-1) 2^k + k \cdot 2^k$$

$$= \ldots$$

$$= 2^k \cdot T(1) + 2^k \cdot \sum_{i=1}^{k} i$$

$$= 2^k \cdot T(1) + 2^k \cdot \frac{k(k+1)}{2}$$

$$= 2^k\left(\frac{k(k+1)}{2} + T(1)\right).$$

Agora mostraremos que $T(2^k) = 2^k \cdot \left(\frac{k(k+1)}{2} + T(1)\right)$ é solução de (**).

BI $(k=0)$: Trivial pois $T(2^0) = T(1) = 2^0\left(\frac{0 \cdot (0+1)}{2} \cdot T(1)\right)$.

PI $(k>0)$: Temos $T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + k \cdot 2^k$

$$\overset{(h.i.)}{=} 2 \cdot \left(2^{k-1} \cdot \left(\frac{(k-1) \cdot k}{2} + T(1)\right)\right) + k \cdot 2^k$$

$$= 2^k \cdot \left(\frac{(k-1) \cdot k}{2} + T(1)\right) + k \cdot 2^k$$

$$= 2^k \cdot \left(\frac{(k-1) \cdot k}{2} + k + T(1)\right)$$

$$= 2^K \cdot \left(\frac{(K-1) \cdot K + 2K}{2} + T(1) \right)$$

$$= 2^K \cdot \left(\frac{K \cdot (K+1)}{2} + T(1) \right)$$

Assim $T(2^K) = 2^K \cdot \left(\frac{K(K+1)}{2} + T(1) \right)$ que pode ser reescrito em função de n, considerando que $n = 2^K$, como a seguir:

$$T(n) = n \cdot \left(\frac{\lg n \cdot (\lg n + 1)}{2} + T(1) \right) = \theta(n \cdot \lg^2 n).$$

$\boxed{\angle}$