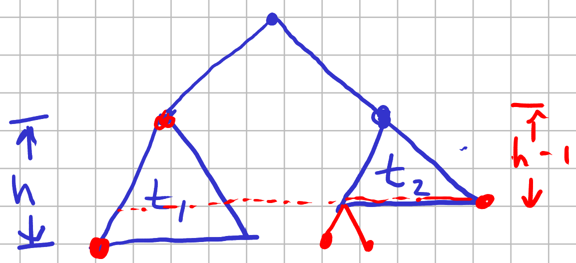
Mostre que em um heap com n elementos e raiz $A[i]$, cada uma das subárvores com raiz em $2i$ e $2i+1$ têm, no máximo, $\frac{2n}{3}$ elementos.

As subárvores com raiz em $2i$ e $2i+1$ terão um número máximo de elementos quando forem árvores binárias completas. Dada a forma como um heap é construído, suponha que a subárvore com raiz em $2i$ seja completa e tenha altura h:



A subárvore t_1 tem $2^{h+1}-1$ elementos e t_2 tem, no máximo, $2^{h+1}-1$.

Como $A[i]$ possui n vértices, temos

$$n = 1 + |t_1| + |t_2| = 1 + \underbrace{(2^{h+1}-1)}_{|t_1|} + |t_2| \geq 1 + (2^{h+1}-1) + \underbrace{2^h - 1}_{\geq |t_2|}$$

$= 2^{h+1} + 2^h - 1$. Ou seja $n \geqslant 2^{h+1} + 2^h - 1 \iff$

$$n+1 \geqslant 2^{h+1} + 2^h \iff$$

$$2.2^h + 2^h \leq n+1 \iff$$

$$3.2^h \leq n+1 \iff$$

$$2^h \leq \frac{n+1}{3} \iff$$

$$2.2^h \leq 2\left(\frac{n+1}{3}\right) \iff$$

$$\underbrace{2^{h+1}-1}_{|t_1|} \leq 2\left(\frac{n+1}{3}\right) - 1 = \frac{2n}{3} + \frac{2}{3} - 1$$

$$= \frac{2n}{3} - \frac{1}{3} \leq \frac{2n}{3}.$$

Logo, $|t_1| \leq \frac{2n}{3}$. $\boxtimes$