Projeto e Análise de Algoritmos

O algoritmo *insertion sort*

Flávio L. C. de Moura*

Nesta seção estudaremos o algoritmo *insertion sort* (ordenação por inserção), que tem como etapa principal inserir um elemento em um vetor ordenado. Assim, queremos ordenar $n > 0$ números naturais em ordem crescente, e para isto vamos supor que estes números estão armazenados no vetor $A[0..n-1]$. Ao final do processo queremos obter uma permutação de $A[0..n-1]$, digamos $A'[0..n-1]$ tal que $A'[i-1] \leq A'[i]$, para todo $1 \leq i < n$. O algoritmo de ordenação por inserção (*insertion sort*) é dado pelo pseudocódigo a seguir:

Algorithm 1: InsertionSort($A[0..n-1]$)

```
1 for j = 1 to n − 1 do
2 |   key ← A[j];
3 |   i ← j − 1;
4 |   while i ≥ 0 and A[i] > key do
5 |   |   A[i + 1] ← A[i];
6 |   |   i ← i − 1;
7 |   end
8 |   A[i + 1] ← key;
9 end
```

A primeira pergunta que precisamos responder é: este algoritmo é correto? Isto é, ele satisfaz as especificações do problema que propõe resolver?

1 A correção do algoritmo de ordenação por inserção

Em algoritmos iterativos utilizamos as invariantes de laço para estabelecer a correção do algoritmo. Dada a dinâmica do algoritmo InsertionSort, considere a seguinte invariante de laço:

> Antes da j-ésima iteração do laço **for** (linhas 1-9), o subvetor $A[0..j-1]$ está ordenado e contém os mesmos elementos do vetor original $A[0..j-1]$.

Assim, se esta propriedade for válida ao final da execução do laço **for**, *i.e.* antes da $n+1$-ésima iteração, teremos que o vetor gerado consiste dos elementos do vetor original $A[0..n-1]$ ordenado. Isto corresponde a dizer que InsertionSort é correto.

Como então provar esta invariante para InsertionSort? A prova é por indução no número de iterações do laço **for**:

- **Inicialização** (Base da indução): Antes da primeira iteração do laço **for**, temos que $j = 1$ (condição necessária para iniciar o laço), e portanto a invariante é trivial porque o subvetor unitário $A[0]$ está ordenado por definição.
- **Manutenção** (Passo indutivo): Considere a k-ésima iteração, isto é, $j = k$ $(1 < k < n)$. Temos como hipótese que "Antes da k-ésima iteração do laço **for** o subvetor $A[0..k-1]$ é uma permutação que está ordenada do subvetor original $A[0..k-1]$." Assim, durante a k-ésima iteração, o laço **while** vai deslocar cada elemento maior do que $A[k]$, i.e. key, uma posição para a direita até encontrar a posição correta onde o elemento $A[k]$ deve ser inserido, de forma que neste momento o subvetor $A[0..k]$ está ordenado e possui os mesmos elementos do subvetor $A[0..k]$ original. A incrementarmos

*flaviomoura@unb.br

o valor de k para a próxima iteração, a invariante é reestabelecida. Informalmente estamos dizendo que o laço **while** encontra a posição correta para inserir $A[j]$ (que está armazenado na variável key). Provaremos este fato com a ajuda de uma invariante para o laço **while**:

> Antes de cada iteração do laço **while**, o subvetor $A[i+1..j]$ possui elementos que são maiores ou iguais a key.

A prova é também por indução no número de iterações do laço **while**:

1. **Inicialização**: Antes da primeira iteração do **while** temos que $i + 1 = j = k$, e como $key = A[j]$ a invariante está satisfeita.
2. **Manutenção**: Por hipótese de indução temos que o subvetor $A[i + 1..j]$ possui elementos que são maiores ou iguais a key. Durante uma iteração do laço, o elemento $A[i]$ é copiado na posição $i + 1$ do vetor A, e portanto a invariante continua valendo.
3. **Finalização**: Ao final da execução do laço, temos que i é, de fato, a posição correta para inserir o elemento $A[k]$ já que todos os elementos do subvetor $A[i + 1..j]$ são maiores ou iguais a key. É importante observar que a inserção do elemento $A[k]$ na posição i não elimina nenhum elemento do vetor original porque o elemento que está na posição i foi copiado para a posição $i+1$, se o laço **while** foi executado pelo menos uma vez, ou ele é o próprio elemento armazenado em key, quando o laço não é executado.

- **Finalização**: Ao final da execução do laço **for**, temos $j = n$, e portanto a invariante corresponde a dizer que o vetor $A[0..n-1]$ obtido ao final da execução do algoritmo está ordenado, e é uma permutação do vetor original $A[0..n-1]$. Assim, concluímos a prova da correção do algoritmo InsertionSort.

Exercício 1.1. *Prove que o algoritmo BubbleSort a seguir é correto.*

Algorithm 2: BubbleSort($A[0..n-1]$)

```
1 for i = 0 to n − 2 do
2 |   for j = 0 to n − 2 − i do
3 |   |   if A[j + 1] < A[j] then
4 |   |   |   swap A[j] and A[j + 1];
5 |   |   end
6 |   end
7 end
```

Exercício 1.2. *Prove que o algoritmo BubbleSort2 [2] a seguir é correto.*

Algorithm 3: BubbleSort2($A[0..n-1]$)

```
1 for i = 0 to n − 2 do
2 |   for j = n − 1 downto i + 1 do
3 |   |   if A[j] < A[j − 1] then
4 |   |   |   swap A[j] and A[j − 1];
5 |   |   end
6 |   end
7 end
```

Exercício 1.3. *Prove que o algoritmo SelectionSort a seguir é correto.*

Algorithm 4: SelectionSort($A[0..n-1]$)

```
1 for i = 0 to n − 2 do
2 |   min ← i;
3 |   for j = i + 1 to n − 1 do
4 |   |   if A[j] < A[min] then
5 |   |   |   min ← j;
6 |   |   end
7 |   end
8 |   swap A[i] and A[min];
9 end
```

1.1 Leitura complementar:

- [1] (Capítulo 2)

Referências

[1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms, Third Edition.* The MIT Press, 3rd edition, 2009.

[2] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms.* MIT Press, Cambridge, MA, USA, 4 edition, April 2022.