Universidade de Brasília - Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
Projeto e Análise de Algoritmos **(2023/2)**

1. $T(1) = 1$, $T(n) = 3T(n/2) + n^2$, $n \geq 2$;

   Para $a = 3$, $b = 2$ e $f(n) = n^2$ tem-se que $n^2 = f(n) \in \Omega(n^{\log_2 3+\epsilon})$, onde $\epsilon \approx 0.4$. Observe que $3f(n/2) = 3n^2/4 \leq cn^2$, onde $c = 7/8$. Portanto, pelo item 3 do Teorema Master, $T(n) \in \Theta(n^2)$.

2. $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(n-1) + 1$, $n \geq 2$;

   Observe que em cada chamada recursiva temos um custo adicional de 1. Analisando a árvore recursiva de $T(n)$ nota-se uma árvore binária de altura $n-1$ onde em cada nível i existem 2^i nós, cada um rotulado com o valor 1. Portanto,

   $$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1 \in \Theta(2^n)$$

   Obs: a prova por indução de que $T(n) \in \Theta(2^n)$ não é necessária neste caso porque a solução do somatório representando $T(n)$ foi feita diretamente. Ela pode ser feita mostrando que $c_1 2^n \leq T(n) \leq c_2 2^n - 1$, para constantes c_1 e c_2.

3. $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(n/2) + n$, $n \geq 2$;

   Para $a = 2$, $b = 2$ e $f(n) = n$ tem-se que $n \in \Theta(n)$ (reflexividade). Portanto, pelo item 2 do TM, $T(n) \in \Theta(n \lg(n))$.

4. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 3T(n/2) + nln(n)$;

   Para $a = 3$, $b = 2$ e $f(n) = n \ln(n)$ tem-se que $n^{\lg 3} = n^{1.5+\epsilon_0}$, onde $0 < \epsilon_0 < 0.085$. Observe que $n^{1.5} = n^{1/2}n$ e que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{\ln(n)} = \infty$. Logo, $f(n) \in O(n^{\lg 3 - \epsilon_0})$. Portanto, pelo item 1 do TM, $T(n) \in \Theta(n^{\lg 3})$.

5. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 3T(n/3 + 5) + n/2$;

   A adição de 5 não deve ser relevante para n suficientemente grande. Pode-se então usar a árvore recursiva para a resolução de $T'(n) = 3T'(n/3) + n/2$ e provar por indução se a solucão é um limite apropriado para $T(n)$. Logo

$$\begin{aligned}
T'(n) &= \sum_{i=0}^{\log_3(n)-1} 3^i \frac{n}{3^i 2} + 3^{\log_3(n)}\Theta(1) \\
&= \sum_{i=0}^{\log_3(n)-1} \frac{n}{2} + n\Theta(1) \\
&= \frac{1}{2} n \log_3(n) + \Theta(n)
\end{aligned}$$

Por indução tem-se que

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{3}+5\right) + \frac{n}{2} \\
&\geq 3c_1\left(\frac{n}{3}+5\right)\log_3\left(\frac{n}{3}+5\right) + \frac{n}{2} \quad (HI) \\
&> 3c_1\frac{n}{3}\log_3\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{n}{2} \quad (monot.) \\
&= c_1 n(\log_3(n) - 1) + \frac{n}{2} \\
&= c_1 n \log_3(n) + n\left(\frac{1}{2} - c_1\right) \\
&\geq c_1 n \log_3(n), \quad \text{para } c_1 \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, $T(n) \in \Omega(n \log_3(n))$.

6. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 2T(n/2) + n/ln(n)$;

Analisando a árvore recursiva de $T(n)$ e supondo que $n = 2^m$ tem-se que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\lg(n)-1} 2^i \frac{n}{2^i} \frac{1}{\ln(n/2^i)} + 2^{\lg(n)}\Theta(1) \\
&= \sum_{i=0}^{\lg(n)-1} \frac{n}{\ln(n/2^i)} + n\Theta(1) \\
&= n \sum_{i=0}^{\lg(n)-1} \frac{1}{\ln(n/2^i)} + \Theta(n) \\
&= n \sum_{i=1}^{\lg(n)} \frac{1}{\ln(2^i)} + \Theta(n) \\
&= \frac{n}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{\lg(n)} \frac{1}{i} + \Theta(n) \\
&\leq \frac{n}{\ln(2)} \big(\lg(\lg(n)) + 1 \big) + \Theta(n) \\
&\in \Theta(n \lg(\lg(n)))
\end{aligned}
$$

7. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = T(n-1) + 1/n$;

   Pela árvore recursiva tem-se que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{n-i} + \Theta(1) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} + \Theta(1) \\
&\leq \lg(n) + \Theta(1) * \\
&\in \Theta(\lg(n))
\end{aligned}
$$

   * Observe que de $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \lg(n) + 1$ obtem-se a desigualdade acima.

8. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = T(n-1) + ln(n)$; Pela árvore recursiva de $T(n)$ tem-se que

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{n-2} \ln(n-i) \;+\; \Theta(1) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \ln(i) \;+\; \Theta(1) \\
&\geq \int_{1}^{n} \ln(i)\mathrm{d}i + \Theta(1) \\
&= n\ln(n) - n + 1 + \Theta(1) \\
&= (\ln(n) - 1)n + \Theta(1) \\
&\in \Theta(n\ln(n))
\end{aligned}
$$

9. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$;

   Seja $S(m) = T(2^m) = 2^{m/2}T(2^{m/2}) + 2^m$. Então $S(m) = 2^{m/2}S(m/2) + 2^m$. Analisando árvore recursiva de $S(m)$ tem-se que

$$
\begin{aligned}
S(m) &= \prod_{i=1}^{\lg(m)} 2^{m/2^i} S(m/2^{\lg(m)}) \;+\; \lg(m)2^m \\
&= \prod_{i=1}^{\lg(m)} 2^{m/2^i} S(1) \;+\; \lg(m)2^m \\
&= 2^{\sum_{i=1}^{\lg m} m/2^i} S(1) \;+\; \lg(m)2^m \\
&= 2^{m\sum_{i=1}^{\lg m}(1/2)^i} S(1) \;+\; \lg(m)2^m \\
&\leq 2^m S(1) \;+\; \lg(m)2^m
\end{aligned}
$$

   Portanto

$$
T(n) \leq nT(2) + n\lg(\lg(n)) \in \Theta(n\lg(\lg(n)))
$$