

Projeto e Análise de Algoritmos (2023-2)

Segunda Avaliação

Prof. Flávio L. C. de Moura

13 de dezembro de 2023

Nome:

Matrícula:

- A resolução pode ser feita à lápis ou caneta, mas seja organizado;
- Esta avaliação é **individual** e **sem consulta**;
- Início: 19:00;
- Término: 20:40.

Resolva as questões a seguir:

Questão 1. (2.0 pontos) *Mostre como podemos ordenar n inteiros contidos no intervalo de 0 a $n^4 - 1$ em tempo linear.*

Solução

Inicialmente iteramos pela lista dos números, convertendo cada um deles para a base n . Depois aplicamos o algoritmo radix-sort sobre a lista, utilizando o counting-sort como o algoritmo de ordenação dos dígitos da lista de números. Dada a nova base, cada número possuirá 4 dígitos, uma vez que $\log_n(n^4) = 4$, onde cada dígito estará em um intervalo entre 0 e $n - 1$. Sabendo disso, radix-sort ordenará n números de 4 dígitos, usando o counting-sort em um intervalo de 0 à $n - 1$, resultando em uma complexidade de $O(4(n + n)) = O(n)$.

Questão 2. *Considere o seguinte problema: Há uma fila de n moedas cujos valores são alguns inteiros positivos c_1, c_2, \dots, c_n , não necessariamente distintos. O objetivo é pegar a quantidade máxima de dinheiro sujeita à restrição de que não se pode pegar duas moedas adjacentes na fila inicial.*

1. (2.0 ponto) *Construa uma recorrência para calcular o montante máximo $F(n)$ que pode ser obtido de uma fila com n moedas.*

Solução

$$F(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ c_1, & \text{se } n = 1 \\ \max(c_n + F(n - 2), F(n - 1)), & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

2. (2.0 pontos) *É fácil ver que a solução força bruta para este problema tem complexidade exponencial. Construa uma solução utilizando programação dinâmica, ou seja, escreva o pseudocódigo, e em seguida faça a análise assintótica da sua solução.*

Solução

A ideia é ir armazenando as soluções dos problemas menores no vetor F (abordagem bottom up) de forma que o mesmo subproblema não será computado mais de uma vez. A entrada do algoritmo é o vetor C contendo os valores c_1, c_2, \dots, c_n das moedas.

```
1  $F[0] \leftarrow 0;$ 
2  $F[1] \leftarrow C[1];$ 
3 for  $i = 2$  to  $n$  do
4   |  $F[i] \leftarrow \max(C[i] + F[i - 2], F[i - 1]);$ 
5 end
6 return  $F[n];$ 
```

Questão 3. Considere um tabuleiro $m \times m$, onde cada uma das m^2 posições contém uma pedra azul, uma pedra vermelha ou não contém nada. Você joga removendo pedras do tabuleiro de forma que se uma coluna do tabuleiro tiver pedras então todas devem ser da mesma cor, e cada linha deve conter pelo menos uma pedra. Você ganha se atinge este objetivo. Dependendo da configuração inicial, pode-se ganhar ou não. Assim, denotando por T a configuração inicial do tabuleiro, representaremos o problema correspondente a este jogo por $S = \{T \text{ corresponde a uma configuração vencedora}\}$. Considere a seguinte transformação: Dada uma instância φ de 3-SAT com m variáveis v_1, v_2, \dots, v_m e k cláusulas $\varphi = (l_1^1 \vee l_2^1 \vee l_3^1) \wedge (l_1^2 \vee l_2^2 \vee l_3^2) \wedge \dots \wedge (l_1^k \vee l_2^k \vee l_3^k)$, construa um tabuleiro $k \times m$, assumindo que nenhuma cláusula de φ contém simultaneamente as variáveis v_i e \bar{v}_i (tais cláusulas podem ser removidas sem afetar a satisfatibilidade de φ), da seguinte forma:

1. Se x_i ocorre na cláusula c_j coloque uma pedra azul na linha c_j e coluna x_i .
2. Se \bar{x}_i ocorre na cláusula c_j coloque uma pedra vermelha na linha c_j e coluna x_i .

O tabuleiro pode ser completado, para que tenha o mesmo número de linhas e colunas, repetindo uma linha ou adicionando uma coluna em branco sem afetar a solvabilidade. Mostre que:

1. (1.5 pontos) Mostre que se φ é satisfatível então T possui uma solução.

Solução

Como φ é satisfatível, então considere uma designação d que faz com que cada cláusula de φ seja verdadeira. Se x_i é verdadeira (resp. falsa) segundo a designação d então remova as pedras vermelhas (resp. azuis) da coluna x_i . Portanto, pedras que correspondem a literais verdadeiros permanecem, e como toda cláusula possui um literal verdadeiro, toda linha possui uma pedra.

2. (1.5 pontos) Mostre que se T possui uma solução então φ é satisfatível.

Solução

Considere uma solução de T . Se pedras vermelhas (resp. azuis) foram removidas de uma coluna então associe o valor verdadeiro (resp. falso) à variável correspondente. Como cada linha possui uma pedra, toda cláusula possui um literal positivo, e portanto φ é satisfatível.

Questão 4. (1.0 ponto) Mostre que o problema S , apresentado na questão anterior, é NP-completo.

Solução

Inicialmente, precisamos mostrar que S está na classe NP, mas é trivial verificar que uma configuração é uma solução em tempo polinomial. Resta mostrar que S é NP-difícil. Pela solução do exercício anterior, temos que 3-SAT $\leq_p S$, e como 3-SAT é NP-completo, concluímos que S é NP-completo.