Lógica Computacional 1

Lógica de Predicados

Flávio L. C. de Moura*

1. Prove os sequentes a seguir:
   (a) $\neg\forall x\, \phi \dashv\vdash \exists x\, \neg\phi$
   (b) $\forall x\, \phi \dashv\vdash \neg\exists x\, \neg\phi$
   (c) $\exists x\, \phi \dashv\vdash \neg\forall x\, \neg\phi$

2. Apresente derivações em Dedução Natural, para os sequentes a seguir assumindo que x não ocorre livre em ψ:
   (a) $(\forall x\, \phi) \land \psi \vdash \forall x\, (\phi \land \psi)$
   (b) $(\exists x\, \phi) \land \psi \vdash \exists x\, (\phi \land \psi)$
   (c) $\forall x\, (\psi \to \phi) \vdash \psi \to \forall x\, \phi$
   (d) $\forall x\, (\phi \to \psi) \vdash (\exists x\, \phi) \to \psi$

3. Prove que não existe uma derivação intuicionista para os sequentes:
   (a) $\neg\exists_x\neg\varphi \vdash \forall_x\varphi$
   (b) $\neg\forall_x\neg\varphi \vdash \exists_x\varphi$

4. Considere a seguinte transformação:
   - $T(p) = p$
   - $T(\neg\phi) = \neg T(\phi)$
   - $T(\phi \land \psi) = T(\phi) \land T(\psi)$
   - $T(\phi \lor \psi) = \neg(\neg T(\phi) \land \neg T(\psi))$
   - $T(\phi \to \psi) = \neg(T(\phi) \land \neg T(\psi))$
   - $T(\forall x\phi) = \forall x T(\phi)$
   - $T(\exists x\phi) = \neg\forall x\neg T(\phi)$

   Mostre que para qualquer fórmula ϕ, $T(\phi)$ é equivalente a ϕ.

5. Seja φ uma fórmula da lógica de predicados. Definimos a tradução negativa de Gödel-Gentzen de φ, denotada por φ^N, indutivamente por:

$$\varphi^N = \begin{cases} \neg\neg\varphi & \text{se } \varphi \text{ é uma fórmula atômica} \\ \neg(\psi^N) & \text{se } \varphi = \neg\psi \\ \varphi_1^N \land \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \land \varphi_2 \\ \neg(\neg(\varphi_1^N) \land \neg(\varphi_2^N)) & \text{se } \varphi = \varphi_1 \lor \varphi_2 \\ \varphi_1^N \to \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \to \varphi_2 \\ \forall_x(\psi^N) & \text{se } \varphi = \forall_x\psi \\ \neg(\forall_x\neg(\psi^N)) & \text{se } \varphi = \exists_x\psi \end{cases}$$

   Construa uma prova intuicionista para o sequente $\neg\neg(\varphi^N) \vdash_i \varphi^N$.

*flaviomoura@unb.br

6. Uma fórmula da lógica de predicados ϕ pertence ao *fragmento negativo* se ϕ pode ser construída a partir da seguinte gramática, onde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(n > 0)$ são termos:

$$\phi ::= \neg p(t_1, t_2, \ldots, t_n) \;||\; \perp \;||\; (\neg\phi) \;||\; (\phi \wedge \phi) \;||\; (\phi \rightarrow \phi) \;||\; (\forall_x \phi)$$

   Prove na lógica minimal que $\neg\neg\theta \vdash_m \theta$ para qualquer fórmula θ pertencente ao fragmento negativo.

7. Escreva em detalhes a prova do Teorema da Correção da Lógica Proposicional.

8. Escreva em detalhes a prova do Teorema da Correção da Lógica de Primeira Ordem.

9. Escreva em detalhes a prova do Teorema de Glivenko para a Lógica de Primeira Ordem sem quantificação universal: Sejam Γ e φ, respectivamente, um conjunto e uma fórmula da Lógica de Primeira Ordem sem quantificação universal. Se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$.