Capítulo 1

A Lógica Proposicional Clássica

Vamos caminhar na direção de mais uma extensão, agora da lógica intuicionista para a lógica clássica. Iniciamos com a lógica proposicional minimal, depois a estendemos para a lógica proposicional intuicionista, e agora vamos estendê-la com a lei do terceiro excluído, obtendo assim a lógica proposicional clássica. Na Tabela 1.1 apresentamos também as regras com contexto explícito para que tenhamos sempre em mente como os contextos mudam de acordo com a aplicação das regras.

Exemplo 1. *Neste exemplo, vamos construir uma prova de uma regra conhecida como* prova por contradição *(PBC). A ideia desta regra é negar o que se quer provar, e então gerar uma contradição. O sequente a ser provado é o seguinte* $(\neg\varphi) \to \bot \vdash \varphi$*. Veja que queremos provar* φ*, e para isto estamos assumindo que a negação de* φ *nos leva a uma contradição. Vamos então tomar uma instância da* (LEM)*, e provar* φ *via a eliminação da disjunção:*

$$\dfrac{(\text{LEM})\,\dfrac{}{\varphi \lor \neg\varphi} \qquad [\varphi]^u \qquad \dfrac{\dfrac{(\neg\varphi) \to \bot \qquad [\neg\varphi]^v}{\bot}\,(\to_e)}{\varphi}\,(\bot_e)}{\varphi}\,(\lor_e)\ u, v$$

A regra de prova por contradição é dada a seguir. Observe como o contexto muda por conta do descarte de hipóteses:

Notação com sequentes	*Notação padrão*
$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\,(\text{PBC})$	$\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{\varphi}\,(PBC)\ u\end{array}$

Agora vamos construir esta prova em Coq, mas precisamos de alguns cuidados porque a lógica implementada no Coq é construtiva, e portanto não temos táticas que correspondam a uma aplicação da lei do terceiro excluído. Neste caso, vamos adicionar a lei do terceiro excluído como um axioma:

	Notação com sequentes	Notação padrão
1	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \land \varphi_2}\ (\land_i)$	$\dfrac{\varphi_1 \qquad \varphi_2}{\varphi_1 \land \varphi_2}\ (\land_i)$
2	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \land \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}\ (\land_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \land \varphi_2}{\varphi_{i\in\{1,2\}}}\ (\land_e)$
3	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \lor \varphi_2}\ (\lor_i)$	$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}}{\varphi_1 \lor \varphi_2}\ (\lor_i)$
4	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \lor \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ (\lor_\mathrm{e})$	$\dfrac{\varphi_1 \lor \varphi_2 \qquad \begin{array}{c}[\varphi_1]^u \\ \vdots \\ \gamma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_2]^v \\ \vdots \\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ (\lor_e)\ u, v$
5	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to_\mathrm{i})$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$
6	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\to_e)$	$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ (\to_e)$
7	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\neg_\mathrm{i})$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$
8	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$	$\dfrac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
9	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\bot_e)$	$\dfrac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e)$
10	$\dfrac{}{\vdash \varphi \lor \neg\varphi}\ (\mathrm{LEM})$	$\dfrac{}{\varphi \lor \neg\varphi}\ (\mathrm{LEM})$

Tabela 1.1: Regras da Lógica Clássica

```
Section pbc.
 Variable phi: Prop.

 Axiom lem: phi \/ ~phi.

 Hypothesis H: ~phi -> False.
 Lemma pbc: phi.
 Proof.
```

e o contexto de prova correspondente é como a seguir:

```
phi : Prop
H : ~ phi -> False
============================
phi
```

Podemos adicionar um axioma ou lema no contexto via a tática `pose proof`. Neste caso, usamos `pose proof lem` para obtermos o seguinte contexto:

```
phi : Prop
H : ~ phi -> False
H0 : phi \/ ~ phi
============================
phi
```

Agora podemos dividir a prova em duas subprovas com a tática `destruct H0`. A primeira subprova é trivial porque o que queremos provar está nas hipóteses. Na segunda subprova, temos pelo menos dois caminhos possíveis para seguir. O primeiro consiste em manipular as hipóteses (raciocínio de cima para baixo) para gerar o absurdo nas hipóteses por meio da tática `apply` no seguinte contexto:

```
phi : Prop
 H : ~ phi -> False
 H0 : ~ phi
 ============================
 phi
```

Como resultado, temos o absurdo como hipótese e podemos provar qualquer coisa via a regra da explosão (tática `contradiction`):

```
phi : Prop
H : ~ phi -> False
H0 : False
============================
phi
```

A prova completa é dada a seguir:

```
Variable phi: Prop.

Axiom lem: phi \/ ~phi.

Hypothesis H: ~phi -> False.
Lemma pbc: phi.
Proof.
 pose proof lem.
 destruct H0.
 - assumption.
 - apply H in H0.
   contradiction.
Qed.
```

O segundo caminho consiste em gerar o absurdo como objetivo a ser provado, ou seja, aplicamos a regra da explosão de baixo para cima na prova. Isto pode ser feito com a tática `apply False_ind` que simplesmente troca o objetivo atual (qualquer que seja ele) pelo absurdo. Neste caso, podemos aplicar a hipótese H (com a tática `apply H`) e concluir a prova com `assumption`.

```
Variable phi: Prop.

Axiom lem: phi \/ ~phi.

Hypothesis H: ~phi -> False.
Lemma pbc: phi.
Proof.
 pose proof lem.
 destruct H0.
 - assumption.
 - apply False_ind.
   apply H.
   assumption.
Qed.
```

Exercício 1. *Acabamos de caracterizar a lógica proposicional clássica como sendo a lógica proposicional intuicionista juntamente com a lei do terceiro excluído (ver Tabela 1.1), mas outras caracterizações são possíveis. Por exemplo, a lógica minimal juntamente com a regra de prova por contradição (PBC) também nos dá a lógica proposicional clássica. Ou seja, a Tabela 1.2 nos dá outra caracterização da lógica proposicional clássica. Para mostrarmos que esta é, de fato, uma caracterização da lógica proposicional clássica precisamos provar tanto a regra da explosão quanto a lei do terceiro excluído a partir das regras da Tabela 1.2. Sendo assim, prove os sequentes a seguir utilizando as regras da Tabela 1.2:*

1. $\bot \vdash \varphi$ *(regra da explosão)*
2. $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ *(lei do terceiro excluído)*
3. *Refaça estas duas provas no Coq.*

Uma terceira caracterização possível para a lógica proposicional clássica é com a regra de eliminação da dupla negação:

	Notação com sequentes	Notação padrão
1	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \land \varphi_2}\ (\land_i)$	$\dfrac{\varphi_1 \qquad \varphi_2}{\varphi_1 \land \varphi_2}\ (\land_i)$
2	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \land \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}\ (\land_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \land \varphi_2}{\varphi_{i\in\{1,2\}}}\ (\land_e)$
3	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \lor \varphi_2}\ (\lor_i)$	$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}}{\varphi_1 \lor \varphi_2}\ (\lor_i)$
4	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \lor \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ (\lor_\mathrm{e})$	$\dfrac{\varphi_1 \lor \varphi_2 \qquad \begin{matrix}[\varphi_1]^u \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\varphi_2]^v \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\ (\lor_e)\ u, v$
5	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to_\mathrm{i})$	$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$
6	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\to_e)$	$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ (\to_e)$
7	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\neg_\mathrm{i})$	$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$
8	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$	$\dfrac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
9	$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\mathrm{PBC})$	$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\ (PBC)\ u$

Tabela 1.2: Regras da Lógica Clássica (versão 2)

Notação com sequentes	Notação padrão
$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\neg\neg_e)$	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$

Exercício 2. *Substitua a regra 9 (PBC) na Tabela 1.2 pela regra* $(\neg\neg_e)$*, e prove os seguintes sequentes:*

1. $\bot \vdash \varphi$ *(regra da explosão)*
2. $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ *(lei do terceiro excluído)*
3. $\neg\varphi \to \bot \vdash \varphi$ *(prova por contradição)*
4. *Refaça estas três provas no Coq.*

Considerando que a negação, digamos $\neg\varphi$, é o mesmo que $\varphi \to \bot$, é fácil ver que as regras de eliminação da dupla negação e prova por contradição são maneiras diferentes de escrever a mesma coisa (por que?). Uma outra caracterização possível da lógica proposicional clássica envolve a chamada *lei de Peirce* (LP), como detalhado no exemplo a seguir:

Notação com sequentes	Notação padrão
$\dfrac{}{\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi}\ (\text{LP})$	$\dfrac{}{((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi}\ (\text{LP})$

Exercício 3. *Assuma a regra (LP) acima, e prove o sequente* $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ *utilizando as regras da Tabela* **??**

Exercício 4. *Sejam* φ *e* ψ *fórmulas da LP. Prove* $\varphi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$*.*

Exercício 5. *Sejam* φ *e* ψ *fórmulas da LP. Prove* $\varphi \to \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \vee \psi$*.*

Exercício 6. *Sejam* φ *e* ψ *fórmulas da LP. Prove o sequente* $(\neg\varphi) \to \psi \vdash (\neg\psi) \to \varphi$*.*

Exercício 7. *Sejam* φ *e* ψ *fórmulas quaisquer da LP. Prove os sequentes* $\neg\neg(\varphi \vee \psi) \dashv\vdash (\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi)$*.*

Exercício 8. $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi \vdash \bot$[a]

[a]Note que a bi-implicação $\psi \leftrightarrow \gamma$ é apenas uma notação compacta para $(\psi \to \gamma) \wedge (\gamma \to \psi)$.

Exercício 9. $(\neg\varphi) \to (\neg\psi) \vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$

Exercício 10. *Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer da LP. Mostre que o sequente $\varphi \to \psi \vdash (\neg\varphi) \lor \psi$ não possui uma derivação intuicionista.*

Exemplo 2. *Considere o seguinte problema: Em uma ilha moram apenas dois tipos de pessoas: as honestas, que sempre falam a verdade; e as desonestas, que sempre mentem. Um viajante, ao passar por esta ilha encontra três moradores chamados A, B e C. O viajante pergunta para o morador A:*
"Você é honesto ou desonesto?" A responde algo incompreensível, e o viajante pergunta para B: "O que ele disse?" B então responde "Ele disse que é desonesto". Neste momento C se manifesta: "Não acredito nisto! Isto é uma mentira!". Questão: C é honesto ou desonesto?

Para resolver este problema pense no que ocorre se um morador desta ilha, digamos X, disser "Eu sou desonesto"? Isto nos levaria a uma contradição! De fato, se X for honesto então ele disse a verdade, e portanto é desonesto. Por outro lado, se X é desonesto então ele mentiu, e portanto é honesto. Assim, como A não poderia ter dito que é desonesto, podemos concluir que B é desonesto! E portanto, C é honesto! Vamos construir uma prova de que este raciocínio está em correto usando a teoria que estudamos? O ponto de partida é construir um sequente que corresponda ao enunciado deste problema. Que variáveis proposicionais vamos precisar? Certamente precisamos de variáveis que nos permitam caracterizar quando um morador é ou não honesto. Assim, utilizaremos três variáveis proposicionais com a seguinte semântica:

- *a: o morador A é honesto;*
- *b: o morador B é honesto;*
- *c: o morador C é honesto.*

Desta forma, a negação de qualquer destas variáveis significa que o morador correspondente é desonesto. Agora precisamos representar o que foi dito por cada um dos moradores por meio de uma fórmula da lógica proposicional. Considere o que disse o morador B: "Ele disse que é desonesto", quer dizer, o morador B disse que o morador A disse que era desonesto. Como codificar este fato por meio de uma fórmula da LP? Vamos iniciar considerando uma situação geral e mais simples. Digamos que um morador X tenha dito Y, isto é, "X disse Y". Que fórmula da LP corresponde a este fato? Suponha que a variável x codifica a proposição "X é honesto". Então observe que, se X for honesto então o que ele disse é verdade, ou seja, tanto x quanto Y são verdade. Por outro lado, se X for desonesto então Y é falso, e tanto x quanto Y são falsos. Assim, podemos concluir que as variáveis x e Y são equivalentes, no sentido que ou ambas são verdadeiras, ou ambas são falsas. Assim, podemos representar a afirmação "X disse Y" pela fórmula $x \leftrightarrow Y$. Voltando então ao nosso problema original, podemos agora representar o fato de que o morador B disse que o morador A disse que era desonesto pela fórmula $b \leftrightarrow (a \leftrightarrow (\neg a))$. O morador C por sua vez, disse que B mentiu, o que corresponde a fórmula $c \leftrightarrow (\neg b)$. Com isto podemos montar o sequente a ser provado: $b \leftrightarrow (a \leftrightarrow (\neg a)), c \leftrightarrow (\neg b) \vdash c$.

Exercício 11. *Prove o sequente $b \leftrightarrow (a \leftrightarrow (\neg a)), c \leftrightarrow (\neg b) \vdash c$ construído no exemplo anterior.*

Exercício 12. *Considere uma ilha onde moram apenas dois tipos de pessoas: as honestas, e que portanto sempre falam a verdade; e as desonestas, que sempre mentem. Um viajante, ao passar por esta ilha encontra três moradores chamados A, B e C. O viajante pergunta para o morador A: "Quantos, dentre vocês três, são desonestos?" A responde algo incompreensível, e o viajante pergunta para B: "O que ele disse?" B então responde "Ele disse que exatamente dois de nós somos desonestos". Neste momento C se manifesta: "Não acredito nisto! Isto é uma mentira!". Questão: C é honesto ou desonesto?*

Exercício 13. *Em uma ilha moram apenas dois tipos de habitantes: os honestos, que sempre falam a verdade; e os desonestos, que sempre mentem. Você encontra dois habitantes desta ilha, digamos João e José. João diz que José é desonesto. José diz "Nem João nem eu somos desonestos". Você consegue determinar qual dos dois é honesto e qual é desonesto?*

No exemplo anterior, utilizamos a associação do valor de verdade (verdadeiro ou falso) de uma variável proposicional para resolver um problema. Esta abordagem está relacionado com a semântica da lógica proposicional clássica que nos fornece os meios para concluir quando uma fórmula é verdadeira ou falsa. A gramática

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \tag{1.1}$$

define como são as fórmulas da LP, a partir de seis construtores:

1. O primeiro denota uma variável proposicional, e caracteriza uma fórmula atômica, i.e. uma fórmula que não pode ser subdividida em uma fórmula menor.

2. O segundo construtor é uma constante que denota o absurdo ($\bot$), que também é uma fórmula atômica. O absurdo é utilizado para representar uma fórmula que tem valor de verdade "falso (F)". É importante observar que podemos associar a qualquer fórmula da LP apenas dois valores de verdade, a saber: verdadeiro (T) ou falso (F).

3. O terceiro construtor denota a negação e nos permite construir uma nova fórmula a partir de uma fórmula dada. Assim, dada uma fórmula φ, podemos construir a sua negação $(\neg\varphi)$. A semântica da negação é a que conhecemos intuitivamente: se uma fórmula φ é verdadeira (T) então sua negação é falsa (F), e vice-versa. Normalmente, representamos este fato via a seguinte tabela:

φ	$(\neg\varphi)$
T	F
F	T

4. O quarto construtor denota a conjunção e nos permite construir uma nova fórmula a partir de duas fórmulas dadas. Assim, dadas duas fórmulas φ_1 e φ_2, podemos construir a sua conjunção $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$. A semântica da conjunção também é a usual, isto é, a conjunção $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ é verdadeira somente quando φ_1 e φ_2 são simultaneamente verdadeiras:

   Aqui é importante observar que a leitura da construção da conjunção na gramática 1.1 não diz que suas componentes são iguais (apesar da utilização do mesmo símbolo φ nas duas componenetes). Lembre-se que a leitura desta construção em 1.1 é: dadas duas fórmulas (não necessariamente iguais!), podemos construir a sua conjunção. Alternativamente, poderíamos ter escrito a gramática

φ_1	φ_2	$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

1.1 da seguinte forma equivalente:

$$\varphi, \psi ::= p \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \rightarrow \psi) \tag{1.2}$$

5. O quinto construtor denota a disjunção e, como no caso anterior, nos permite construir uma nova fórmula a partir de duas fórmulas dadas. Assim, dadas duas fórmulas φ_1 e φ_2, podemos construir a sua disjunção $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, cuja semântica é dual à semântica da conjunção: a disjunção $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ é falsa somente quando φ_1 e φ_2 são simultaneamente falsas.

φ_1	φ_2	$(\varphi_1 \vee \varphi_2)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

6. O sexto construtor é a implicação. Assim, dadas duas fórmulas φ_1 e φ_2, podemos construir a sua implicação $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ com a semântica dada na tabela abaixo.

φ_1	φ_2	$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

O sentido usual da implicação assume implicitamente uma relação de causa e efeito, ou causa e consequência no sentido de que o antecedente φ_1 é o que gera o consequente φ_2 como em "Se eu não beber água então ficarei desidratado". No entanto, o sentido da implicação na lógica é um pouco diferente pois tem como fundamento a *preservação da verdade*, que não necessariamente possui uma relação de causa e efeito. Por exemplo, a proposição "Se 2+2=4 então o dia tem 24 horas" é verdadeira, mas não existe relação causal entre a igualdade 2+2=4 e o fato de o dia ter 24 horas de duração.

Uma gramática como 1.1 (ou 1.2) nos fornece as regras sintáticas para a construção das fórmulas da LP. São quatro construtores recursivos (negação, conjunção, disjunção e implicação) também chamados de conectivos lógicos, e dois não recursivos.

Apesar da gramática apresentada acima não incluir a bi-implicação, este é um conectivo bastante utilizado. De fato, a bi-implicação, já utilizada em exemplos anteriores, pode ser reescrita em usando a implicação e conjunção. Como exercício construa a tabela verdade da bi-implicação e observe que $\varphi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira somente quando φ e ψ possuem o mesmo valor de verdade. Adicionalmente, dizemos que duas fórmulas φ e ψ são **equivalentes** quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia:

Tautologia	Uma fórmula que é sempre verdadeira, independentemente dos valores de verdade associados às suas variáveis.
Contradição	Uma fórmula que é sempre falsa, independentemente dos valores de verdade associados às suas variáveis.
Contingência	Uma fórmula que pode ser tanto verdadeira quanto falsa dependendo dos valores de verdade associados às suas variáveis.

As tautologias e as contradições são particularmente importantes, e possuem símbolos especiais para representá-las. Nas gramáticas 1.1 e 1.2 já vimos que a constante $\perp$ é o representante das contradições. As tautologias, por sua vez, podem ser representadas pelo símbolo $\top$.

Agora chegamos em um momento chave do nosso estudo. Considere um sequente arbitrário, digamos $\Gamma \vdash \varphi$, onde Γ é um conjunto finito de fórmulas da LP. Podemos então perguntar: é possível provar este sequente? Ou em outras palavras, qualquer sequente possui uma prova? A resposta certamente é não. Se tudo pudesse ser provado então não teríamos razão para estudar a lógica proposicional. Como então é possível separar os sequentes que têm prova dos que não podem ser provados? Para responder esta pergunta precisamos inicialmente compreender a noção de **consequência lógica**. Dizemos que uma fórmula φ é consequência lógica da fórmula ψ, notação $\psi \models \varphi$, se φ for verdadeira sempre que ψ for verdadeira. Este conceito pode ser facilmente estendido para um conjunto Γ de fórmulas, de forma que $\Gamma \models \varphi$, isto é, φ é consequência lógica do conjunto Γ se φ for verdadeira sempre que as fórmulas em Γ forem verdadeiras. Agora podemos enunciar dois teoremas importantes que nos permitirão responder à questão anterior:

Teorema 3 (Correção da LP)**.** *Sejam Γ um conjunto, e φ uma fórmula da lógica proposicional. Se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \models \varphi$.*

A prova deste teorema é por indução em $\Gamma \vdash \varphi$. Não detalharemos aqui esta prova, que pode ser encontrada por exemplo em [1].

Teorema 4 (Completude da LP)**.** *Sejam Γ um conjunto, e φ uma fórmula da lógica proposicional. Se $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$.*

A prova do teorema de completude da LP é um pouco mais complexa do que a prova de correção, e também pode ser encontrada em [1]. Note que este lema responde a nossa pergunta anterior: um sequente tem prova exatamente quando seu consequente for consequência lógica do seu antecedente.

A lógica proposicional nos permite resolver diversos problemas, e constitui a base de tudo o que faremos nos próximos capítulos. Apesar de muito importante como ponto de partida no estudo que estamos fazendo, a lógica proposicional possui limitações importantes, como a impossibilidade de quantificar de forma explícita sobre elementos de um conjunto. Por exemplo, podemos representar a sentença "Todo mundo gosta de Matemática" na LP via uma variável proposicional, mas esta representação não expressa a quantificação universal "Todo mundo" de forma explícita. O mesmo vale para uma sentença da forma "Existe um número natural que não é primo". O próprio princípio da indução, tão importante em Matemática e Computação, precisa de uma linguagem mais expressiva do que a proposicional. A lógica que nos permitirá expressar este tipo de quantificação (tanto existencial quanto universal) é conhecida como *Lógica de Primeira Ordem* (LPO), ou *Lógica de Predicados* que estudaremos no próximo capítulo.

Bibliography

[1] M. Ayala-Rincón and F. L. C. de Moura. *Applied Logic for Computer Scientists - Computational Deduction and Formal Proofs.* UTCS. Springer, 2017.