Capítulo 1

A Lógica Proposicional Intuicionista

Agora vamos estender a lógica proposicional minimal com uma nova regra chamada de *regra da explosão* ou *regra da eliminação do absurdo intuicionista*. Esta regra nos permite concluir qualquer fórmula a partir do absurdo:

$$\frac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e)$$

ou seja, agora a constante $\bot$ tem uma semântica diferente porque agora a partir dela podemos concluir qualquer fórmula. A lógica obtida adicionando-se a regra da explosão à lógica proposicional minimal é denominada *lógica proposicional intuicionista*. Observe que a lógica proposicional minimal possui uma versão mais fraca de regra de explosão. De fato, podemos na lógica proposicional minimal concluir qualquer fórmula negada a partir do absurdo (???). A lógica proposicional intuicionista é conhecida por corresponder à noção de lógica construtiva que é particularmente interessante para a Computação. De forma simplificada, a lógica proposicional intuicionista pode ser vista como a lógica que rejeita a lei do terceiro excluído, ou seja, nesta lógica o sequente $\vdash \varphi \lor \neg\varphi$ não tem prova, quando φ é uma fórmula arbitrária.

Vejamos um exemplo de prova na lógica proposicional intuicionista:

	Notação de sequentes	Notação padrão
1	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi_1 \qquad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)$
2	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}\ (\wedge_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i \in \{1,2\}}}\ (\wedge_e)$
3	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi_{i \in \{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$
4	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ (\vee_\mathrm{e})$	$\dfrac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \begin{array}{c}[\varphi_1]^u \\ \vdots \\ \gamma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_2]^v \\ \vdots \\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ (\vee_e)\ u, v$
5	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to_\mathrm{i})$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$
6	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\to_e)$	$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ (\to_e)$
7	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\neg_\mathrm{i})$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$
8	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$	$\dfrac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
9	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\bot_e)$	$\dfrac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e)$

Tabela 1.1: Regras da Lógica Intuicionista

Exemplo 1. *Considere o seguinte sequente $\neg\varphi \vee \gamma \vdash \varphi \to \gamma$. Iniciando esta prova de baixo para cima, isto é, partindo do consequente, podemos aplicar a regra de introdução da implicação:*

$$\begin{array}{c} \neg\varphi \vee \gamma \qquad [\varphi]^u \\ \\ ? \\ \\ \dfrac{\gamma}{\varphi \to \gamma}\ (\to_i)\ u \end{array}$$

Agora precisamos construir uma prova de γ tendo as fórmulas $\neg\varphi \vee \gamma$ e $[\varphi]^u$ como contexto. Uma ideia possível é usar a regra de eliminação da disjunção porque com o lado esquerdo, isto é, com $\neg\varphi$ e com $[\varphi]^u$ temos o absurdo, e com a regra da explosão podemos concluir γ como queríamos. O lado direito da disjunção já é igual a γ, e assim concluímos a prova:

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \vee \gamma \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^v \qquad [\varphi]^u}{\bot}\ (\neg_e)}{\gamma}\ (\bot_e) \qquad [\gamma]^w}{\gamma}\ (\vee_e)\ v, w}{\varphi \to \gamma}\ (\to_i)\ u$$

Agora vamos refazer esta prova no Coq.

Exemplo 2. *Precisamos declarar duas variáveis, digamos* `phi` *e* `psi`*, e a hipótese* `(~phi)\/psi`*:*

```
Variables phi psi: Prop.

Section or_to_imp.
 Hypothesis H: (~phi) \/ psi.
 Lemma or_to_imp: phi -> psi.
 Proof.
```

Neste momento estamos com a seguinte janela de prova:

```
H : ~ phi \/ psi
============================
phi -> psi
```

Reproduzindo a prova anterior (de baixo para cima), devemos iniciar com a tática `intro` que corresponde à regra $(\rightarrow_i)$, para em seguida dividirmos a prova em função da disjunção na hipótese `H` com a tática `destruct H`. O primeiro subcaso consiste em construir uma prova de `psi` tendo `phi` e `~phi` no contexto. Neste momento podemos utilizar a regra da explosão por meio da tática `contradiction`. O outro ramo é trivial:

```
Variables phi psi: Prop.

Section or_to_imp.
 Hypothesis H: (~phi) \/ psi.
 Lemma or_to_imp: phi -> psi.
 Proof.
   intro H'.
   destruct H.
   - contradiction.
   - assumption.
 Qed.
End or_to_imp.
```

Exercício 1. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente $(\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi) \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ na LPI.*

Exercício 2. *Seja φ uma fórmula da LP. Construa uma prova para o sequente $\vdash \neg\neg(\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$ na LPI.*

Exercício 3. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente $\vdash \neg\neg(((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ na LPI.*