Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação 11 de setembro de 2024

Lógica Computacional 1 (2024-1)

Segunda avaliação

Prof. Flávio L. C. de Moura

Exercício 1. *O teorema da correção da lógica de primeira ordem diz que se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \models \varphi$. Podemos utilizar o teorema da correção para mostrar que um sequente não tem prova. De fato, podemos concluir que $\Gamma \nvdash \varphi$ mostrando que $\Gamma \not\models \varphi$ e usando a contrapositiva do teorema da correção.*

1. *(**2.5 pontos**) Considere o sequente*

$$\exists_x(p(x) \to q(x)) \vdash (\exists_x p(x)) \to (\exists_x q(x))$$

Responda se este sequente é válido ou não. Em caso afirmativo, apresente um prova (em dedução natural ou cálculo de sequentes), e em caso negativo use o teorema da correção para justificar sua resposta.

Solução

O sequente não é válido. Considere a seguinte interpretação $I : \begin{cases} D = \{a, b\} \\ p^I = \{a\} \\ q^I = \{\} \end{cases}$

Temos que $\exists_x(p(x) \to q(x))$ é verdadeira nesta interpretação, pois podemos interpretar x como o elemento b do domínio. No entanto, $(\exists_x p(x)) \to (\exists_x q(x))$ é falsa nesta interpretação já que nenhum elemento do domínio D satisfaz o predicado q.

2. *(**2.5 pontos**) Considere o sequente*

$$\forall_x(p(x) \to q(x)) \vdash (\forall_x p(x)) \to (\forall_x q(x))$$

Responda se este sequente é válido ou não. Em caso afirmativo, apresente um prova (em dedução natural ou cálculo de sequentes), e em caso negativo use o teorema da correção para justificar sua resposta.

Solução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_x(p(x) \to q(x))}{p(a) \to q(a)}\,(\forall_e) \qquad \dfrac{[\forall_x\ p(x)]^u}{p(a)}\,(\forall_e)}{q(a)}\,(\to_e)}{\forall x\ q(x)}\,(\forall_i)}{(\forall x\ p(x)) \to (\forall x\ q(x))}\,(\to_i)\ u$$

Exercício 2. *O teorema de Glivenko diz que se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$ na lógica proposicional, ou seja, se φ tem uma prova clássica a partir de Γ, então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de Γ na lógica proposicional. Este resultado não pode ser estendido para a lógica de predicados, mas vale para uma restrição desta, a saber, a lógica de predicados sem quantificação universal. Considerando a lógica de predicados sem quantificação universal, prove por indução que se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$ para o caso em que a última regra aplicada na derivação de $\Gamma \vdash \varphi$ é:*

1. *(**2.5 pontos**) a introdução do quantificador existencial.*

Solução

$$
\dfrac{
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\end{array}}{\neg\neg\psi[x/x_0]}\ (h.i.)
\qquad
\dfrac{\dfrac{[\neg(\exists x\psi)]^b \qquad \dfrac{[\psi[x/x_0]]^a}{\exists x\psi}\ (\exists_i)}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\psi[x/x_0]}\ (\neg_i)\ a
}{
\dfrac{\bot}{\neg\neg(\exists x\psi)}\ (\neg_i)\ b
}\ (\neg_e)
$$

(a) *(**2.5 pontos**) a eliminação do quantificador existencial.*

Solução

$$
\dfrac{
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\end{array}}{\neg\neg\exists x\psi}\ (h.i.)
\qquad
\dfrac{\dfrac{[\exists x\psi]^a \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\psi[x/x_0]]^b\\ \vdots\end{array}}{\neg\neg\varphi}\ (h.i.) \qquad [\neg\varphi]^c}{\bot}\ (\neg_e)}{\bot}\ (\exists_e)\ b}{\neg\exists x\psi}\ (\neg_i)\ a
}{
\dfrac{\bot}{\neg\neg\varphi}\ (\neg_i)\ c
}\ (\neg_e)
$$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i) \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e) \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge_e)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i) \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i) \qquad\qquad \frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$$

$$\frac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e) \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ u$$

$$\frac{\varphi[x/x_0]}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i) \qquad\qquad \frac{\forall_x \varphi}{\varphi[x/t]}\ (\forall_e)$$

onde x_0 é variável nova que não ocorre em hipótese não descartada na prova de $\varphi[x/x_0]$

$$\frac{\varphi[x/t]}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i) \qquad\qquad \frac{\exists_x \varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi[x/x_0]]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$$

onde x_0 é variável nova que não ocorre em χ.