Lógica Computacional 1

A Semântica da Lógica de Primeira Ordem

Flávio L. C. de Moura*

1 Semântica da Lógica de Primeira Ordem

A semântica da Lógica de Primeira Ordem (LPO) é uma área fundamental da lógica matemática que lida com a interpretação de fórmulas. Para interpretarmos uma fórmula da LPO precisamos construir inicialmente uma *estrutura* que nos permita atribuir significado aos símbolos não-lógicos (constantes, funções e predicados) presentes nas fórmulas.

Definição 1.1. *Uma* estrutura *de uma linguagem de primeira ordem sobre o conjunto $S = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ (de símbolos de função e de predicados, respectivamente) é um par (D, m) com as seguintes propriedades:*

1. *D é um conjunto não-vazio chamado de* universo *ou* domínio *da estrutura;*
2. *m é uma função definida como a seguir:*
   (a) *para cada constante (função da aridade 0), $f \in \mathcal{F}$, associamos um elemento $m(f)$ de D;*
   (b) *para cada símbolo de função $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n > 0$, $m(f)$ é uma função de D^n para D;*
   (c) *para cada símbolo de predicado $p \in \mathcal{P}$ de aridade $n > 0$, $m(p)$ é um subconjunto de D^n.*

A interpretação de variáveis livres é feita via uma *função de atribuição (ou designação) $d : var \to D$* que associa uma variável a um elemento do domínio. A partir destas noções podemos definir uma interpretação:

Definição 1.2. *Uma função de atribuição (ou designação) em uma estrutura (D, m) é uma função $l : var \to D$. Denotaremos por $l[x \mapsto a]$ a função de atribuição que leva x em a e qualquer outro valor y é levado em $l(y)$.*

Definição 1.3. *Uma interpretação I é um par $((D, m), d)$, onde (D, m) é uma estrutura e d é uma designação.*

Exemplo 1.4. *Considere a fórmula $\forall_x p(x)$ e a interpretação $I = ((\mathbb{N}, m(p) = \mathbb{N}), d)$, onde d é uma designação qualquer. A interpretação do predicado p dada por $m(p) = \mathbb{N}$ nos diz que todos os elementos de $\mathbb{N}$ satisfazem o predicado p, e portanto a fórmula $\forall_x p(x)$ é verdadeira segundo a interpretação I. Observe que como a fórmula em consideração não possui variáveis livres, a designação d não é utilizada. Considere agora a interpretação $I' = ((\mathbb{N}, m(p) = \{2.n \mid n \in \mathbb{N}\}), d)$, onde d é uma designação qualquer. Agora a fórmula $\forall_x p(x)$ é falsa segundo a interpretação I' uma vez que apenas os números pares satisfazem o predicado p.*

No exemplo a seguir, utilizamos uma notação mais compacta para apresentar uma estrutura. Ao invés de $m(p)$, $m(f)$ escreveremos, respectivamente, p^m, f^m. Uma estrutura $\mathfrak{A} = (D, m)$ sobre os conjuntos $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ e $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\}$ será escrita na forma $(D, p_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, p_m^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_n^{\mathfrak{A}})$.

Exemplo 1.5. *A seguir listamos diversas estruturas:*

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$ - *o corpo dos números reais;*
2. $(\mathbb{N}, \leq)$ - *o conjunto ordenado dos números naturais;*

*flaviomoura@unb.br

3. $(\mathbb{Z}, <, +, -, 0)$ - *o grupo ordenado dos números inteiros (com a soma usual). Observe que, neste caso* $-$ *é uma função unária, enquanto que* $+$ *é binária;*

4. $(\mathbb{Q}, \cdot, {}^{-1}, 1)$ - *o grupo (abeliano) dos números racionais (com a multiplicação usual);*

5. $(\mathbb{Z}, +, \cdot, {}^{-1}, 0, 1)$ - *o anel dos números inteiros.*

Exemplo 1.6. *Por exemplo, se a interpretação* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, i)$ *é tal que* $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, 0, 1)$ *e* $i(v_n) = 2n$ *então a fórmula* $v_2 \cdot (v_1 + v_2) = v_4$ *é lida como* $4 \cdot (2 + 4) = 8$*. Já a fórmula* $\forall v_0 \exists v_1 (v_0 < v_1)$ *é lida como "para todo número natural* v_0 *existe um número natural* v_1 *maior do que* v_0*".*

Notação: $|\mathfrak{A}| = A$, o universo de $\mathfrak{A}$. A estrutura $\mathfrak{A}$ é dita (in)finita se o seu universo é (in)finito.

Exercício 1.7. *Considere a interpretação* $\mathfrak{I}$ *dada no exemplo anterior. Como as fórmulas a seguir são lidas com esta interpretação?*

1. $\exists v_0 (v_0 + v_0 = v_1)$

2. $\exists v_0 (v_0 \cdot v_0 = v_1)$

3. $\exists v_1 (v_0 = v_1)$

4. $\forall v_0 \exists v_1 (v_0 = v_1)$

5. $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 < v_1 \wedge v_2 < v_1)$

Modelos

A noção de satisfação que definiremos nesta seção tornará precisa a noção de quando uma fórmula é verdadeira sob uma dada interpretação. A definição a seguir mostra como termos são interpretados:

Definição 1.8. *Seja* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, i)$ *uma interpretação. Então:*

1. *para cada variável* x*, definimos* $\mathfrak{I}(x) := i(x)$*;*

2. *para cada constante* c*, definimos* $\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$*;*

3. *para cada símbolo de função* f *de aridade* n*, e termos* $t_1, \dots, t_n$*, definimos* $\mathfrak{I}(f(t_1, \dots, t_n)) := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n))$*.*

Agora podemos definir recursivamente a relação "$\mathfrak{I}$ é um modelo da fórmula ϕ", onde $\mathfrak{I}$ é uma interpretação arbitrária.

Definição 1.9. *Para toda interpretação* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, i)$*, dizemos que* $\mathfrak{I}$ *satisfaz a fórmula* ϕ *(notação* $\mathfrak{I} \models \phi$*) da seguinte forma:*

- $\mathfrak{I} \models p(t_0, \dots, t_{n-1})$ *sse* $p^{\mathfrak{A}}\ \mathfrak{I}(t_0) \dots \mathfrak{I}(t_{n-1})$*, i.e. se a n-upla* $(\mathfrak{I}(t_0), \dots, \mathfrak{I}(t_{n-1}))$ *está no subconjunto de* D^n *que corresponde a interpretação do predicado* p*;*
- $\mathfrak{I} \models \neg\phi$ *sse não é o caso que* $\mathfrak{I} \models \phi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \phi \wedge \psi$ *sse* $\mathfrak{I} \models \phi$ *e* $\mathfrak{I} \models \psi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \phi \vee \psi$ *sse* $\mathfrak{I} \models \phi$ *ou* $\mathfrak{I} \models \psi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \phi \rightarrow \psi$ *sse se* $\mathfrak{I} \models \phi$ *então* $\mathfrak{I} \models \psi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \phi \leftrightarrow \psi$ *sse* $\mathfrak{I} \models \phi$ *se, e somente se,* $\mathfrak{I} \models \psi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \forall_x \phi$ *sse para todo* $a \in A$ *tal que* $\mathfrak{I}\frac{x}{a} \models \phi$*;*
- $\mathfrak{I} \models \exists_x \phi$ *sse existe* $a \in A$ *tal que* $\mathfrak{I}\frac{x}{a} \models \phi$*.*

Dado um conjunto S de fórmulas, dizemos que $\mathfrak{I}$ é um modelo de S (notação $\mathfrak{I} \models S$) se $\mathfrak{I} \models \phi$ para todo $\phi \in S$.

Definição 1.10. *Seja ϕ uma fórmula da lógica de primeira ordem. Dizemos que ϕ é:*

- satisfatível*, se existe uma interpretação $\mathcal{M}$ que é modelo de ϕ;*
- insatisfatível*, se não possui modelos;*
- válida*, se qualquer interpretação $\mathcal{M}$ é modelo de ϕ;*
- inválida*, se existe uma interpretação $\mathcal{M}$ que não é modelo de ϕ.*

Exemplo 1.11. *Seja $\mathcal{F} = \{e, \cdot\}$ e $\mathcal{P} = \{\leq\}$, onde e é uma constante, $\cdot$ é uma função binária e $\leq$ é um predicado binário. Considere o modelo $\mathcal{M}$, onde A é o conjunto de todas as* strings *(palavras) sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ incluindo a palavra vazia que denotaremos por ϵ. A interpretação $e^{\mathcal{M}}$ corresponde a palavra vazia ϵ, enquanto que $\cdot^{\mathcal{M}}$ corresponde a concatenação de palavras. Por exemplo, $010111 \cdot^{\mathcal{M}} 1100$ é igual a 0101111100. Em geral, se $a_1a_2 \ldots a_k$ e $b_1b_2 \ldots b_r$ são palavras com $a_i, b_j \in \{0, 1\}$ então $a_1a_2 \ldots a_k \cdot^{\mathcal{M}} b_1b_2 \ldots b_r$ é igual a $a_1a_2 \ldots a_kb_1b_2 \ldots b_r$. Finalmente, interpretamos $\leq$ como a relação de prefixo sobre palavras, isto é, $x \leq y$ significa "x é prefixo de y".*

Dizemos que s_1 é um prefixo de s_2 se existir uma palavra s_3 tal que s_2 é igual a $s_1 \cdot^{\mathcal{M}} s_3$.

1. *Em nosso modelo, a fórmula $\forall_x((x \leq x \cdot e) \wedge (x \cdot e \leq x))$ diz que qualquer palavra é um prefixo dela mesma concatenado com a palavra vazia e vice-versa. Esta fórmula claramente é verdadeira em nosso modelo.*
2. *Em nosso modelo, a fórmula $\exists_y\forall_x(y \leq x)$ diz que existe uma palavra s que é prefixo de todas as outras palavras. Esta fórmula é verdadeira porque podemos tomar ϵ como sendo a tal palavra. Note que, de fato, esta é a única escolha possível neste caso.*
3. *Em nosso modelo, a fórmula $\forall_x\exists_y(y \leq x)$ diz que toda palavra possui um prefixo. Isto também é verdade e, em geral, existem muitas escolhas possíveis que dependem de x.*
4. *Em nosso modelo, a fórmula $\forall_x\forall_y\forall_z((x \leq y) \to (x \cdot z \leq y \cdot z))$ diz que sempre que a palavra s_1 for um prefixo da palavra s_2 então a palavra s_1s tem que ser um prefixo da palavra s_2s para toda palavra s. Esta fórmula é falsa em nosso modelo: basta tomar $s_1 = 01$, $s_2 = 011$ e $s = 0$.*
5. *Em nosso modelo a fórmula $\forall_y\exists_x((x \leq y) \to (y \leq x))$ diz que para qualquer palavra s existe uma palavra s' (que depende de s e) que é prefixo a s e tal que s' é também prefixo de s. Isto é verdadeiro, pois podemos considerar s' como sendo a própria s.*
6. *Em nosso modelo a fórmula $\exists_x\forall_y((x \leq y) \to (y \leq x))$ diz que existe uma palavra s que seja prefixo de (toda) palavra s_1 é tal que s_1 é também prefixo de s. Isto é falso, pois a única palavra que é prefixo de todas as outras é a palavra vazia, no entanto apenas a palavra vazia é prefixo dela mesma.*

Exemplo 1.12. *Seja $\mathcal{F} = \{\texttt{maria}\}$ e $\mathcal{P} = \{\texttt{ama}\}$, onde* `maria` *é uma constante e* `ama` *é um predicado binário. O modelo $\mathcal{M}$ que estamos construindo consiste de $A = \{a, b, c\}$, da função constante $\texttt{maria}^{\mathcal{M}} = a$ e do predicado $\texttt{ama}^{\mathcal{M}} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$.*

Queremos verificar se $\mathcal{M}$ satisfaz a seguinte sentença:

Nenhuma das pessoas que amam as pessoas que amam `maria` *ama* `maria`*.*

Inicialmente precisamos codificar esta sentença na LPO:

$$\forall_x\forall_y(ama(x, \texttt{maria}) \wedge ama(y, x) \to \neg ama(y, \texttt{maria}))$$

Escolhendo a para x e b para y é fácil ver que este modelo não satisfaz esta fórmula.

E se considerarmos o modelo $\mathcal{M}'$ onde A permanece inalterado e $\texttt{maria}^{\mathcal{M}'} = \texttt{maria}^{\mathcal{M}}$ e $\texttt{ama}^{\mathcal{M}'} = \{(b, a), (c, b)\}$? Neste caso, a sentença

$$\forall_x\forall_y(ama(x, \texttt{maria}) \wedge ama(y, x) \to \neg ama(y, \texttt{maria}))$$

é verdadeira em $\mathcal{M}'$.

Exercício 1.13. *Seja P um símbolo de predicado unário e f uma função binária. Para cada uma das fórmulas $\forall_{v_1}f(v_0, v_1) = v_0$, $\exists_{v_0}\forall_{v_1}f(v_0, v_1) = v_1$ e $\exists_{v_0}(P(v_0) \wedge \forall_{v_1}P(f(v_0, v_1))$ encontre uma interpretação que satisfaz a fórmula e uma que não a satisfaz.*

Consequência lógica

Na lógica proposicional dizemos que ψ é consequência lógica de $\phi_1, \ldots, \phi_n$, denotado por $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$, quando ψ é verdadeira sempre que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ o forem. Como estender esta noção para a lógica de primeira ordem considerando que $\mathcal{M} \models \psi$?

Definição 1.14. *Seja Γ um conjunto (possivelmente infinito) de fórmulas da LPO e ψ uma fórmula da LPO.*

1. *A fórmula ψ é consequência lógica do conjunto Γ (notação $\Gamma \models \psi$) sse todo modelo de Γ é também modelo de ψ.*

2. *O conjunto Γ é satisfatível sse existe uma intepretação $\mathcal{I}$ que é modelo de Γ, i.e. $\mathcal{I} \models \Gamma$.*

O símbolo $\models$ é utilizado aqui tanto para representar a noção de consequência lógica como para checagem de modelos. Computacionalmente estas duas noções são complicadas:

1. Verificar que $\mathcal{M} \models \phi$ de forma mecânica (isto é, por uma máquina) pode se tornar muito difícil se o universo D de $\mathcal{M}$ for infinito. Neste caso, checar uma sentença da forma $\forall_x \psi$, onde x ocorre livre em ψ significa verificar $\mathcal{M} \models_{[x \mapsto a]} \psi$ para um número infinito de elementos.

2. Verificar que $\phi_1, \ldots, \phi_n \models \psi$ vale é ainda mais complicado já que precisaríamos considerar *todos os possíveis modelos* que possuem a estrutura adequada. Lembre-se que na lógica proposicional isto é feito via tabelas-verdade.

Para alguns casos particulares podemos raciocinar sobre a noção de consequência lógica utilizando argumentos que não dependem de um modelo específico. Infelizmente isto só é possível para um número muito limitado de casos. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.15. *Considere $\forall_x(p(x) \to q(x)) \models \forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$. Seja $\mathcal{M}$ um modelo que satisfaz a fórmula $\forall_x(p(x) \to q(x))$. Precisamos mostrar que $\mathcal{M}$ satisfaz $\forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$. Se algum dos elementos de $\mathcal{M}$ não satisfaz p então $\forall_x p(x)$ é falsa e portanto $\forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$ é verdadeiro, e não há nada a fazer. Caso contrário, isto é, se $\mathcal{M}$ satisfaz $\forall_x p(x)$ então $\mathcal{M} \models_{l[x \mapsto a]} p(x)$ para todo $a \in A$, e como $\mathcal{M}$ satisfaz $\forall_x(p(x) \to q(x))$ temos que $\mathcal{M} \models_{l[x \mapsto a]} q(x)$ para todo $a \in A$. Portanto $\mathcal{M}$ satisfaz $\forall_x q(x)$. Assim conseguimos mostrar que $\forall_x(p(x) \to q(x)) \models \forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$ vale utilizando argumentos que independem do modelo $\mathcal{M}$.*

Exemplo 1.16. *E quanto a $\forall_x p(x) \to \forall_x q(x) \models \forall_x(p(x) \to q(x))$? Agora as coisas ficam muito mais complicadas... Suponha que $\mathcal{M}'$ é um modelo que satisfaz $\forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$. Se A' é o universo associado a este modelo e $p^{\mathcal{M}'}$ e $q^{\mathcal{M}'}$ são as respectivas interpretações de p e q então $\mathcal{M}' \models \forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$ simplesmente nos diz que se $p^{\mathcal{M}'}$ é igual ao conjunto A' então $q^{\mathcal{M}'}$ também é igual ao conjunto A'. Mas se este não é o caso, então o fato de a implicação $\forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$ ser verdadeira não nos fornece nenhuma informação adicional. A partir destas observações podemos construir um contra-exemplo: seja $A' = \{a, b\}$, $p^{\mathcal{M}'} = \{a\}$ e $q^{\mathcal{M}'} = \{b\}$. Então $\mathcal{M}' \models \forall_x p(x) \to \forall_x q(x)$ vale, mas $\mathcal{M}' \models \forall_x(p(x) \to q(x))$ não vale.*

Exercício 1.17. *Considere a fórmula $\phi = \forall_x \forall_y (q(g(x, y), g(y, y), z))$. Construa duas interpretações $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ tais que $\mathcal{M} \models \phi$ e $\mathcal{M}' \not\models \phi$.*

Exercício 1.18. *Considere a sentença $\phi = \forall_x \exists_y \exists_z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge (p(x, z) \to p(z, x)))$. Quais das seguintes interpretações dadas a seguir satisfazem ϕ?*

1. *A interpretação $\mathcal{M}$ possui como domínio o conjunto dos números naturais, e $p^{\mathcal{M}} = \{(m, n) \mid m < n\}$;*

2. *A interpretação $\mathcal{M}'$ possui como domínio o conjunto dos números naturais, e $p^{\mathcal{M}'} = \{(m, 2m) \mid m$ é um número natural$\}$;*

3. *A interpretação $\mathcal{M}''$ possui como domínio o conjunto dos números naturais com $p^{\mathcal{M}''} = \{(m, n) \mid m < n + 1\}$.*

Exercício 1.19. *Considere a sentença* $\forall_x \neg p(x,x)$*. Construa uma interpretação que satisfaz esta sentença e outra que não a satisfaça.*

Exercício 1.20. *Considere as seguintes sentenças:*

$$\begin{array}{rcl} \phi_1 & = & \forall_x p(x,x) \\ \phi_2 & = & \forall_x \forall_y (p(x,y) \to p(y,x)) \\ \phi_3 & = & \forall_x \forall_y \forall_z ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \to p(x,z)) \end{array}$$

que expressam a reflexividade, simetria e transitividade do predicado p*. Mostre que nenhuma destas sentenças é consequência lógica das outras duas escolhendo, para cada par de sentenças uma interpretação que satisfaça estas duas sentenças, mas não satisfaça a terceira. Essencialmente você deve encontrar três relações binárias onde cada uma satisfaz apenas duas destas propriedades.*

Exercício 1.21. *Mostre que* $\forall_x \neg\phi \models \neg\exists_x \phi$*. Para isto considere uma interpretação genérica* $\mathcal{M}$ *e mostre que se* $\mathcal{M} \models \forall_x \neg\phi$ *então* $\mathcal{M} \models \neg\exists_x \phi$ *vale.*

Exercício 1.22. *Seja* ϕ *sentença* $\forall_x \forall_y \exists_z (r(x,y) \to r(y,z))$*.*

1. *Seja* $\mathcal{M}$ *uma interpretação onde* $A = \{a,b,c,d\}$ *e* $r^{\mathcal{M}} = \{(b,c),(b,b),(b,a)\}$*. É o caso que* $\mathcal{M} \models \phi$*?*
2. *Seja* $\mathcal{M}'$ *uma interpretação onde* $A' = \{a,b,c\}$ *e* $r^{\mathcal{M}'} = \{(b,c),(a,b),(c,b)\}$*. É o caso que* $\mathcal{M}' \models \phi$*?*

Exercício 1.23. *É o caso que* $\forall_x (p(x) \vee q(x)) \models \forall_x p(x) \vee \forall_x q(x)$*? Em caso afirmativo, construa uma prova, e em caso negativo justifique sua resposta.*

Exercício 1.24. *É o caso que* $\exists_x (p(x) \vee q(x)) \models \exists_x p(x) \vee \exists_x q(x)$*? Em caso afirmativo, construa uma prova, e em caso negativo justifique sua resposta.*

Exercício 1.25. *Considere as seguintes sentenças:*

$$\begin{array}{l} \forall_x (\exists_y (x+y=0) \wedge \exists_z (z+x=0)) \\ \forall_x ((x+0=x) \wedge (0+x=x)) \\ \forall_x \forall_y \forall_z (x+(y+z)=(x+y)+z) \end{array}$$

Seja γ *a conjunção destas três sentenças.*

1. *Mostre que* γ *é satisfatível.*
2. *Mostre que* γ *não é uma tautologia.*
3. *Mostre que a sentença* $\forall_x \forall_y (x+y=y+x)$ *não é consequência lógica de* γ*.*

Exercício 1.26. *Determine se os sequentes a seguir são válidos ou não, e justifique sua resposta:*

1. $\vdash (\forall_x \exists_y p(x,y)) \to (\exists_y \forall_x p(x,y))$
2. $\vdash (\exists_y \forall_x p(x,y)) \to (\forall_x \exists_y p(x,y))$