

Lógica Computacional 1 (2025-1)

Flávio L. C. de Moura*

27 de março de 2025

A Lógica Proposicional Minimal

Vamos estudar novos conectivos lógicos além da implicação. A nova gramática terá, além da implicação, uma constante (\perp), a negação (\neg), a conjunção (\wedge) e a disjunção (\vee):

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \quad (1)$$

A constante \perp é utilizada para representar a negação: $\neg\varphi$ é o mesmo que $\varphi \rightarrow \perp$. Ou seja, temos duas maneiras distintas de escrever a negação, e portanto a gramática acima possui redundâncias. De fato, veremos que existem outras redundâncias na gramática (1), mas elas são úteis porque simplificam a escrita das fórmulas.

A gramática (1) define as fórmulas da LP, e a partir dela consideraremos 3 sublógicas da LP: a minimal, a intuicionista e a clássica. Nesta seção estudaremos a Lógica Proposicional Minimal (LPM), que assim como no fragmento implicacional visto anteriormente, possui uma regra de introdução e uma regra de eliminação para cada um dos conectivos lógicos. Ou seja, uma regra de introdução e uma de eliminação para cada um dos construtores recursivos da gramática (1).

Apesar da gramática apresentada acima não incluir a bi-implicação, este é um conectivo bastante utilizado, e pode ser escrito em função dos outros conectivos: $\varphi \leftrightarrow \psi$ é o mesmo que $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

As regras da negação são análogas às regras da implicação, uma vez que uma negação, digamos ($\neg\varphi$) é definida como $(\varphi \rightarrow \perp)$.

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\varphi} (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \neg\varphi \quad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \perp} (\neg_e)$$

*flaviomoura@unb.br

Veremos posteriormente que apenas com a negação e implicação podemos expressar todos os outros conectivos apresentados na gramática (1), que portanto é uma gramática redundante. No entanto, esta redundância é interessante porque nos permite expressar fórmulas complexas de forma compacta.

A *regra de introdução da conjunção*, denotada por (\wedge_i) , nos diz o que precisamos fazer para construir uma prova de um sequente que possui uma conjunção na conclusão, isto é, um sequente da forma $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, onde Γ é um conjunto finito de fórmulas da LP, e φ_1 e φ_2 são fórmulas da LP. A regra (\wedge_i) é dada pela seguinte regra de inferência:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \varphi_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$$

ou seja, uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ é construída a partir de uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_1$ e de uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_2$.

Existem duas regras de eliminação para a conjunção já que podemos extrair qualquer uma das componentes de uma conjunção:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1} (\wedge_{e_1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2} (\wedge_{e_2})$$

Estas duas regras podem ser representadas de forma mais concisa da seguinte forma:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$$

Usaremos o nome (\wedge_e) para designar a utilização da regra de eliminação da conjunção quando não quisermos especificar qual das regras (\wedge_{e_1}) ou (\wedge_{e_2}) foi utilizada.

Exemplo 1. Com as regras da conjunção já podemos fazer um exercício interessante: provar a comutatividade da conjunção, isto é, queremos construir uma prova para o sequente $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$, onde φ e ψ são fórmulas quaisquer da LP. A construção da prova é feita inicialmente de baixo para cima com a aplicação da regra (\wedge_i) :

$$\frac{\frac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} \quad \frac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi}}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi} (\wedge_i)$$

Concluimos com a regra de eliminação da conjunção e o axioma:

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi} (Ax)}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} (\wedge_e) \quad \frac{\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi} (Ax)}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi} (\wedge_e)}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi} (\wedge_i)$$

Exemplo 2. Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer da LP. Considere o sequente $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Queremos provar que a partir de uma prova de ψ podemos provar qualquer implicação que tenha ψ como conclusão:

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi \vdash \varphi} (Ax) \quad \frac{}{\psi \vdash \psi} (Ax)}{\psi, \varphi \vdash \varphi \wedge \psi} (\wedge_i)}{\frac{\psi, \varphi \vdash \psi} (\wedge_e)}{\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)$$

O sequente do exemplo anterior nos diz que podemos construir a prova de uma implicação a partir de uma prova do conseqüente desta implicação. Esta prova é utilizada com muita frequência em outras provas, e por esta razão promovemos este sequente ao *status* de regra derivada:

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)\emptyset$$

Uma vez que uma bi-implicação corresponde a uma conjunção de duas implicações, ela pode ser decomposta com a regra de eliminação da conjunção:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2} (\wedge_{e1})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2 \rightarrow \varphi_1} (\wedge_{e2})$$

Vejamos agora as regras para a disjunção. A *regra de introdução da disjunção* nos permite construir a prova de uma disjunção a partir da prova de qualquer uma das suas componentes:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_{i1})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_{i2})$$

Como no caso da regra de eliminação da conjunção podemos representar estas duas regras de forma mais compacta:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$$

A *regra de eliminação da disjunção* nos permite construir a prova de uma fórmula, digamos γ , a partir de uma disjunção. Para isto, precisamos de duas provas distintas de γ , cada uma assumindo uma das componentes da disjunção separadamente:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma_2, \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma_3, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma} (\vee_e)$$

Observe como os contextos mudam em cada um dos sequentes que compõem esta regra.

Exemplo 3. Vamos mostrar que a disjunção é comutativa, ou seja, queremos construir uma prova para o sequente $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$. A ideia aqui é utilizarmos a regra (\vee_e) . Para isto podemos instanciar Γ com o conjunto unitário contendo a fórmula $\varphi \vee \psi$. Em função da estrutura da regra (\vee_e) , precisamos construir duas provas distintas de $\psi \vee \varphi$: uma a partir de φ , e outra a partir de ψ . Podemos fazer isto com a ajuda da regra (\vee_i) :

$$(Ax) \frac{\frac{\frac{}{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi}{} \quad \frac{\frac{}{\varphi \vdash \varphi} (Ax) \quad \frac{}{\varphi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_i)}{\varphi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_i) \quad \frac{\frac{}{\psi \vdash \psi} (Ax) \quad \frac{}{\psi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_i)}{\psi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_i)}{\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_e)$$

Exemplo 4. Considere o sequente $\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$. Como a fórmula do conseqüente é uma negação, vamos aplicar a regra de introdução da negação na construção de uma prova de baixo para cima, isto é, da raiz para as folhas da árvore:

$$\frac{\frac{?}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \perp}}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi} (\neg_i)$$

Agora, precisamos construir uma prova do absurdo, e portanto podemos tentar utilizar a regra (\neg_e) . Para isto precisamos escolher uma fórmula do contexto para fazer o papel de φ da regra 8 da Tabela 1. A princípio temos três opções: $\varphi \rightarrow \psi$, $\neg\psi$ e φ . A boa escolha neste caso é $\neg\psi$ porque podemos facilmente provar ψ a partir deste contexto:

$$(\rightarrow_e) \frac{\frac{\frac{\frac{}{\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi} (Ax) \quad \frac{}{\varphi \vdash \varphi} (Ax)}{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi} (\rightarrow_e) \quad \frac{}{\neg\psi \vdash \neg\psi} (Ax)}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \perp} (\neg_e)}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi} (\neg_i)$$

Depois de concluída a prova é fácil entender o que queríamos dizer com boa escolha acima: Uma boa escolha é um caminho que vai nos permitir concluir uma prova. Mas como fazer uma boa escolha? Isto depende do problema a ser resolvido. Em alguns casos pode ser simples, mas em outros, bastante complicado. O ponto importante a compreender é que existem caminhos possíveis distintos na construção de provas da lógica proposicional, e muito deste processo depende da nossa criatividade.

O sequente que acabamos de provar ocorre com certa frequência em outras provas, assim como a regra derivada (\neg_i) . As regras que são obtidas a partir das regras da Tabela 1 são chamadas de *regras derivadas*. Este é o caso da regra conhecida como *modus tollens* (MT) obtida a partir do sequente do exemplo anterior, onde cada antecedente é generalizado como uma premissa da regra:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma_2 \vdash \neg\psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\varphi} \text{ (MT)}$$

Exemplo 5. Considere o sequente $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$. Inicialmente, devemos observar que a fórmula que queremos provar é uma implicação, e portanto, o mais natural é tentar aplicar a regra (\rightarrow_i) , e em seguida aplicar (MT) (na construção de baixo para cima) para poder completar a prova:

$$\frac{\begin{array}{c} (Ax) \frac{}{\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{}{\neg\psi \vdash \neg\psi} (Ax) \\ \hline \varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi} \text{ (MT)}$$

$$\frac{}{\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi} (\rightarrow_i)$$

A prova que acabamos de fazer é outro caso que aparece com frequência, e corresponde a uma regra conhecida como *contrapositiva*:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi} \text{ (CP)}$$

A Tabela 1 resume todas as regras da LPM, isto é, as regras de introdução e eliminação dos conectivos lógicos apresentados na gramática 1. A Tabela 2 apresenta as regras derivadas provadas nos exemplos anteriores.

✓ **Exercício 6.** Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente $\varphi, \psi \vdash \psi$.

A solução do exercício anterior nos permite trabalhar com uma versão mais flexível do axioma:

$$\frac{}{\varphi, \psi \vdash \psi}$$

✓ **Exercício 7.** Prove o sequente $\vdash (p \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r$.

Exercício 7. Prove o sequente $\vdash (p \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p \rightarrow r]^u \quad [p]^v}{r} (\rightarrow e) \\
 \frac{r}{q \rightarrow r} (\rightarrow i) v \\
 \frac{p \rightarrow q \rightarrow r}{(p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))} (\rightarrow i) u
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p \rightarrow r]^u \quad \frac{\frac{[p]^v \quad [q]^w}{p \wedge q} (\wedge i)}{p} (\wedge e)}{r} (\rightarrow e)}{q \rightarrow r} (\rightarrow i) w \\
 \frac{p \rightarrow q \rightarrow r}{(p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))} (\rightarrow i) u
 \end{array}$$

	Regras de introdução	Regras de eliminação
0	$\frac{}{\varphi \vdash \varphi} \text{ (Ax)}$	
1	$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \varphi_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} \text{ } (\wedge_i)$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} \text{ } (\wedge_e)$
2	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \text{ } (\vee_i)$	$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma_2, \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma_3, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma} \text{ } (\vee_e)$
3	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \text{ } (\rightarrow_i)$	$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi} \text{ } (\rightarrow_e)$
4	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} \text{ } (\neg_i)$	$\frac{\Gamma_1 \vdash \neg \varphi \quad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \perp} \text{ } (\neg_e)$

Tabela 1: Regras da Lógica Proposicional Minimal

$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg \neg \varphi} \text{ } (\neg\neg_i)$	$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma_2 \vdash \neg \psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg \varphi} \text{ (MT)}$	$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \text{ } (\rightarrow_i)\emptyset$	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi} \text{ (CP)}$
---	--	---	--

Tabela 2: Regras derivadas da Lógica Proposicional Minimal

✓ **Exercício 8.** *Seja φ uma fórmula da LP. Prove o sequente $\varphi \vdash \neg \neg \varphi$.*

✓ **Exercício 9.** *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\neg \neg \varphi) \rightarrow (\neg \neg \psi)$.*

✓ **Exercício 10.** *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente $\neg \neg (\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\neg \neg \varphi) \rightarrow (\neg \neg \psi)$.*

✓ **Exercício 11.** *Prove que a conjunção é associativa, isto é, prove o sequente $(\varphi \wedge \psi) \wedge \rho \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \rho)$ onde φ , ψ e ρ são fórmulas quaisquer da LP.*

✓ **Exercício 12.** *Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer da LP. Prove os sequentes $\neg \neg (\varphi \wedge \psi) \dashv \vdash (\neg \neg \varphi) \wedge (\neg \neg \psi)$.*

$$\begin{array}{c}
 \frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge B} (\wedge_e) \\
 \frac{A \wedge B}{A} (\wedge_e) \\
 \hline
 A \wedge (B \wedge C)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge B} (\wedge_e) \\
 \frac{A \wedge B}{B} (\wedge_e) \\
 \frac{A \wedge B}{C} (\wedge_e) \\
 \hline
 B \wedge C \\
 \hline
 A \wedge (B \wedge C) \text{ } (\wedge_i)
 \end{array}$$

Exercício 9. Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o seguinte $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi)$.

$$\frac{A \rightarrow B \quad [A]^\omega \quad (\rightarrow e)}{B} \quad \frac{[\neg B]^\omega \quad \perp \quad (\neg i)^\omega}{\neg A} \quad \frac{[\neg A]^\omega \quad \perp \quad (\neg i)^\omega}{\neg\neg B} \quad \frac{\neg\neg B \quad (\rightarrow i)^\omega}{(\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg B)}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad (\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi)}{\varphi \rightarrow \psi} \quad (CP)$$

$$A \rightarrow B \vdash (\neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg A)$$

$$\frac{A \rightarrow B \quad [A]^\omega \quad (\rightarrow e)}{B} \quad \frac{[\neg B]^\omega \quad \perp \quad (\neg i)^\omega}{\neg A} \quad \frac{\neg\neg B \quad (\rightarrow i)^\omega}{(\neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg A)}$$

$$\frac{(Ax) \quad A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \quad (Ax) \quad A \vdash A}{A \rightarrow B, A \vdash B} \quad \frac{A \rightarrow B, A \vdash B \quad (Ax) \quad \neg B \vdash \neg B}{A \rightarrow B, \neg B, A \vdash \perp} \quad \frac{A \rightarrow B, \neg B, A \vdash \perp \quad (\neg i)}{A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A} \quad \frac{A \rightarrow B, \neg A, \neg B \vdash \perp \quad (\neg i)}{A \rightarrow B, \neg A \vdash \neg\neg B} \quad \frac{A \rightarrow B, \neg A \vdash \neg\neg B \quad (\rightarrow i)}{A \rightarrow B \vdash (\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg B)}$$

$$\frac{A \rightarrow B \quad (CP)}{(\neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg A)} \quad (CP)$$

✓ **Exercício 13.** *Sejam φ , ψ e ρ fórmulas quaisquer da LP. Prove que a disjunção é associativa, isto é, prove o sequente $(\varphi \vee \psi) \vee \rho \vdash \varphi \vee (\psi \vee \rho)$.*

✓ **Exercício 14.** *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente $\varphi \rightarrow \neg\psi \vdash \psi \rightarrow \neg\varphi$.*

✓ **Exercício 15.** *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente $\vdash (((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$.*

✓ **Exercício 16.** *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi$.*

✓ **Exercício 17.** *Seja φ uma fórmula da LP. Construa uma prova para o sequente $\neg\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi$.*

✓ **Exercício 18.** *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$.*

Exercício 19. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$.*

Exercício 20. *Sejam φ, ψ e δ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\delta \vee \varphi) \rightarrow (\delta \vee \psi)$.*

Exercício 21. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$.*

Exercício 22. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente $\varphi \wedge \psi \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.*

Exercício 26. Sejam φ e γ fórmulas da LP. Construa uma prova para o seguinte $(\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma) \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \gamma)$.

$$(\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B) \vdash_m \neg\neg(A \wedge B)$$

Handwritten proof steps:

- $(\neg\neg A) \wedge (\neg\neg B)$ (1e)
- $\neg\neg A$ (2e)
- $\neg\neg B$ (3e)
- \perp (4i) ω
- $\neg A$ (5i) ω
- $\neg B$ (6i) ω
- $\neg\neg(A \wedge B)$ (7i) ω
- $[A] [B]$ (8i) ω
- $A \wedge B$ (9e)
- $\neg\neg(A \wedge B)$ (10e)

Diagram of inference rules and their relationships:

- (MT)** $\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \varphi}$ (MT)
- $A \rightarrow B, \neg B \vdash_m \neg A$
- (I)** $\frac{A \rightarrow B \quad [A]^u}{B}$ (I)
- (C)** $\frac{\neg B \quad \frac{\perp}{\neg A} (7i) \omega}{\perp} (9e)$
- (PBC)**

Relationships shown with arrows and brackets:

- Arrows from (I) and (C) point to (MT).
- Arrows from (I) and (C) point to PBC.
- Arrows from (I) and (C) point to the derivation $A \rightarrow B, \neg B \vdash_m \neg A$.

Exercício 23. *Sejam φ e γ fórmulas da LP. Construa uma prova para os seqüentes $\neg(\varphi \vee \gamma) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma)$ e $(\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \vee \gamma)$.*

Exercício 24. *Sejam φ e γ fórmulas da LP. Construa uma prova para o seqüente $(\neg\varphi) \vee (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \wedge \gamma)$.*

Exercício 25. *Sejam φ e γ fórmulas da LP. Construa uma prova para o seqüente $\neg\neg(\varphi \wedge \gamma) \vdash (\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma)$.*

Exercício 26. *Sejam φ e γ fórmulas da LP. Construa uma prova para o seqüente $(\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma) \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \gamma)$.*

Exercício 27. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da LP. Prove o seqüente $\varphi \vee (\psi \wedge \gamma) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$.*

Exercício 28. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da LP. Prove o seqüente $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \gamma)$.*

Exercício 29. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da LP. Prove o seqüente $\varphi \wedge (\psi \vee \gamma) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)$.*

Exercício 30. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da LP. Prove o seqüente $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \gamma)$.*

Exercício 31. *Seja φ uma fórmula da LP. Prove o seqüente $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$.*

Exercício 32. *Seja φ uma fórmula da LP. Prove o seqüente $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.*

Exercício 33. *Sejam φ e γ fórmulas da LP. Construa uma prova para o seqüente $(\varphi \rightarrow \gamma) \wedge \neg(\varphi \wedge \gamma) \vdash \neg\varphi$.*

Exercício 34. *Sejam φ, ψ e γ fórmulas da LP. Prove o sequente $\varphi \leftrightarrow \psi, \psi \rightarrow \gamma, \neg\gamma \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$.*