

# Lógica Computacional 1 (2025-1)

Flávio L. C. de Moura\*

27 de março de 2025

## A Lógica Proposicional Minimal

Vamos estudar novos conectivos lógicos além da implicação. A nova gramática terá, além da implicação, uma constante ( $\perp$ ), a negação ( $\neg$ ), a conjunção ( $\wedge$ ) e a disjunção ( $\vee$ ):

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \quad (1)$$

A constante  $\perp$  é utilizada para representar a negação:  $\neg\varphi$  é o mesmo que  $\varphi \rightarrow \perp$ . Ou seja, temos duas maneiras distintas de escrever a negação, e portanto a gramática acima possui redundâncias. De fato, veremos que existem outras redundâncias na gramática (1), mas elas são úteis porque simplificam a escrita das fórmulas.

A gramática (1) define as fórmulas da LP, e a partir dela consideraremos 3 sublógicas da LP: a minimal, a intuicionista e a clássica. Nesta seção estudaremos a Lógica Proposicional Minimal (LPM), que assim como no fragmento implicacional visto anteriormente, possui uma regra de introdução e uma regra de eliminação para cada um dos conectivos lógicos. Ou seja, uma regra de introdução e uma de eliminação para cada um dos construtores recursivos da gramática (1).

Apesar da gramática apresentada acima não incluir a bi-implicação, este é um conectivo bastante utilizado, e pode ser escrito em função dos outros conectivos:  $\varphi \leftrightarrow \psi$  é o mesmo que  $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ .

As regras da negação são análogas às regras da implicação, uma vez que uma negação, digamos  $(\neg\varphi)$  é definida como  $(\varphi \rightarrow \perp)$ .

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\varphi} (\neg_i) \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \neg\varphi \quad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \perp} (\neg_e)$$

---

\*flaviomoura@unb.br

Veremos posteriormente que apenas com a negação e implicação podemos expressar todos os outros conectivos apresentados na gramática (1), que portanto é uma gramática redundante. No entanto, esta redundância é interessante porque nos permite expressar fórmulas complexas de forma compacta.

A *regra de introdução da conjunção*, denotada por  $(\wedge_i)$ , nos diz o que precisamos fazer para construir uma prova de um sequente que possui uma conjunção na conclusão, isto é, um sequente da forma  $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ , onde  $\Gamma$  é um conjunto finito de fórmulas da LP, e  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são fórmulas da LP. A regra  $(\wedge_i)$  é dada pela seguinte regra de inferência:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \varphi_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$$

ou seja, uma prova de  $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$  é construída a partir de uma prova de  $\Gamma \vdash \varphi_1$  e de uma prova de  $\Gamma \vdash \varphi_2$ .

Existem duas regras de eliminação para a conjunção já que podemos extrair qualquer uma das componentes de uma conjunção:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1} (\wedge_{e_1})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2} (\wedge_{e_2})$$

Estas duas regras podem ser representadas de forma mais concisa da seguinte forma:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$$

Usaremos o nome  $(\wedge_e)$  para designar a utilização da regra de eliminação da conjunção quando não quisermos especificar qual das regras  $(\wedge_{e_1})$  ou  $(\wedge_{e_2})$  foi utilizada.

**Exemplo 1.** Com as regras da conjunção já podemos fazer um exercício interessante: provar a comutatividade da conjunção, isto é, queremos construir uma prova para o sequente  $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$ , onde  $\varphi$  e  $\psi$  são fórmulas quaisquer da LP. A construção da prova é feita inicialmente de baixo para cima com a aplicação da regra  $(\wedge_i)$ :

$$\frac{\frac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} \quad \frac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi}}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi} (\wedge_i)$$

Concluimos com a regra de eliminação da conjunção e o axioma:

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi} (Ax)}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} (\wedge_e) \quad \frac{\frac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi} (Ax)}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi} (\wedge_e)}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi} (\wedge_i)$$

**Exemplo 2.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas quaisquer da LP. Considere o sequente  $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ . Queremos provar que a partir de uma prova de  $\psi$  podemos provar qualquer implicação que tenha  $\psi$  como conclusão:

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi \vdash \varphi} (Ax) \quad \frac{}{\psi \vdash \psi} (Ax)}{\psi, \varphi \vdash \varphi \wedge \psi} (\wedge_i) \quad \frac{}{\psi, \varphi \vdash \psi} (\wedge_e)}{\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)$$

O sequente do exemplo anterior nos diz que podemos construir a prova de uma implicação a partir de uma prova do conseqüente desta implicação. Esta prova é utilizada com muita frequência em outras provas, e por esta razão promovemos este sequente ao *status* de regra derivada:

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)\emptyset$$

Uma vez que uma bi-implicação corresponde a uma conjunção de duas implicações, ela pode ser decomposta com a regra de eliminação da conjunção:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2} (\wedge_{e_1})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2 \rightarrow \varphi_1} (\wedge_{e_2})$$

Vejamos agora as regras para a disjunção. A *regra de introdução da disjunção* nos permite construir a prova de uma disjunção a partir da prova de qualquer uma das suas componentes:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_{i_1})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_{i_2})$$

Como no caso da regra de eliminação da conjunção podemos representar estas duas regras de forma mais compacta:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$$

A *regra de eliminação da disjunção* nos permite construir a prova de uma fórmula, digamos  $\gamma$ , a partir de uma disjunção. Para isto, precisamos de duas provas distintas de  $\gamma$ , cada uma assumindo uma das componentes da disjunção separadamente:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma_2, \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma_3, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma} (\vee_e)$$

Observe como os contextos mudam em cada um dos sequentes que compõem esta regra.

**Exemplo 3.** Vamos mostrar que a disjunção é comutativa, ou seja, queremos construir uma prova para o sequente  $\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$ . A ideia aqui é utilizarmos a regra  $(\vee_e)$ . Para isto podemos instanciar  $\Gamma$  com o conjunto unitário contendo a fórmula  $\varphi \vee \psi$ . Em função da estrutura da regra  $(\vee_e)$ , precisamos construir duas provas distintas de  $\psi \vee \varphi$ : uma a partir de  $\varphi$ , e outra a partir de  $\psi$ . Podemos fazer isto com a ajuda da regra  $(\vee_i)$ :

$$\frac{(Ax) \frac{}{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi} \quad \frac{\frac{}{\varphi \vdash \varphi} (Ax) \quad \frac{}{\psi \vdash \psi} (Ax)}{\varphi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_i) \quad \frac{\frac{}{\psi \vdash \psi} (Ax) \quad \frac{}{\varphi \vdash \varphi} (Ax)}{\psi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_i)}{\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi} (\vee_e)$$

**Exemplo 4.** Considere o sequente  $\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$ . Como a fórmula do conseqüente é uma negação, vamos aplicar a regra de introdução da negação na construção de uma prova de baixo para cima, isto é, da raiz para as folhas da árvore:

$$\frac{\frac{}{?}}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \perp} \quad \frac{}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi} (\neg_i)$$

Agora, precisamos construir uma prova do absurdo, e portanto podemos tentar utilizar a regra  $(\neg_e)$ . Para isto precisamos escolher uma fórmula do contexto para fazer o papel de  $\varphi$  da regra 8 da Tabela 1. A princípio temos três opções:  $\varphi \rightarrow \psi$ ,  $\neg\psi$  e  $\varphi$ . A boa escolha neste caso é  $\neg\psi$  porque podemos facilmente provar  $\psi$  a partir deste contexto:

$$\frac{(\rightarrow_e) \frac{\frac{}{\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi} (Ax) \quad \frac{}{\varphi \vdash \varphi} (Ax)}{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash \psi} \quad \frac{}{\neg\psi \vdash \neg\psi} (Ax)}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \perp} (\neg_e) \quad \frac{}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi} (\neg_i)$$

Depois de concluída a prova é fácil entender o que queríamos dizer com boa escolha acima: Uma boa escolha é um caminho que vai nos permitir concluir uma prova. Mas como fazer uma boa escolha? Isto depende do problema a ser resolvido. Em alguns casos pode ser simples, mas em outros, bastante complicado. O ponto importante a compreender é que existem caminhos possíveis distintos na construção de provas da lógica proposicional, e muito deste processo depende da nossa criatividade.

O sequente que acabamos de provar ocorre com certa frequência em outras provas, assim como a regra derivada  $(\neg\neg_i)$ . As regras que são obtidas a partir das regras da Tabela 1 são chamadas de *regras derivadas*. Este é o caso da regra conhecida como *modus tollens* (MT) obtida a partir do sequente do exemplo anterior, onde cada antecedente é generalizado como uma premissa da regra:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma_2 \vdash \neg\psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\varphi} \text{ (MT)}$$

**Exemplo 5.** Considere o sequente  $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ . Inicialmente, devemos observar que a fórmula que queremos provar é uma implicação, e portanto, o mais natural é tentar aplicar a regra  $(\rightarrow_i)$ , e em seguida aplicar (MT) (na construção de baixo para cima) para poder completar a prova:

$$\frac{(Ax) \frac{\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi} \quad (Ax) \frac{\neg\psi \vdash \neg\psi}{\neg\psi \vdash \neg\psi} \text{ (MT)}}{\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi} (\rightarrow_i)$$

A prova que acabamos de fazer é outro caso que aparece com frequência, e corresponde a uma regra conhecida como *contrapositiva*:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi} \text{ (CP)}$$

A Tabela 1 resume todas as regras da LPM, isto é, as regras de introdução e eliminação dos conectivos lógicos apresentados na gramática 1. A Tabela 2 apresenta as regras derivadas provadas nos exemplos anteriores.

 **Exercício 6.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\varphi, \psi \vdash \psi$ .

A solução do exercício anterior nos permite trabalhar com uma versão mais flexível do axioma:

$$\overline{\varphi, \psi \vdash \psi}$$

 **Exercício 7.** Prove o sequente  $\vdash (p \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r$ .

**Exercício 7.** Prove o sequente  $\vdash (p \rightarrow r) \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow r$ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p \rightarrow r]^u \quad [p]^s}{r} (\rightarrow e) \\
 \frac{r}{q \rightarrow r} (\rightarrow i) s \\
 \frac{p \rightarrow q \rightarrow r}{(p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))} (\rightarrow i) u
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p \rightarrow r]^u \quad \frac{\frac{[p]^s \quad [q]^w}{p \wedge q} (\wedge i)}{p} (\wedge e)}{r} (\rightarrow e) \\
 \frac{r}{q \rightarrow r} (\rightarrow i) w \\
 \frac{p \rightarrow q \rightarrow r}{(p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))} (\rightarrow i) u
 \end{array}$$

|   | Regras de introdução                                                                                                                    | Regras de eliminação                                                                                                                                                                           |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0 | $\frac{}{\varphi \vdash \varphi} (Ax)$                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                |
| 1 | $\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \quad \Gamma_2 \vdash \varphi_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$ | $\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$                                                                                            |
| 2 | $\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$                                         | $\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma_2, \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma_3, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma} (\vee_e)$ |
| 3 | $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)$                                            | $\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi} (\rightarrow_e)$                                                            |
| 4 | $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} (\neg_i)$                                                              | $\frac{\Gamma_1 \vdash \neg \varphi \quad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \perp} (\neg_e)$                                                                              |

Tabela 1: Regras da Lógica Proposicional Minimal

|                                                                               |                                                                                                                                    |                                                                                               |                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg \neg \varphi} (\neg \neg_i)$ | $\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma_2 \vdash \neg \psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg \varphi} (MT)$ | $\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) \emptyset$ | $\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi} (CP)$ |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Tabela 2: Regras derivadas da Lógica Proposicional Minimal

✓ **Exercício 8.** *Seja  $\varphi$  uma fórmula da LP. Prove o sequente  $\varphi \vdash \neg \neg \varphi$ .*

✓ **Exercício 9.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\neg \neg \varphi) \rightarrow (\neg \neg \psi)$ .*

✓ **Exercício 10.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\neg \neg (\varphi \rightarrow \psi) \vdash (\neg \neg \varphi) \rightarrow (\neg \neg \psi)$ .*

✓ **Exercício 11.** *Prove que a conjunção é associativa, isto é, prove o sequente  $(\varphi \wedge \psi) \wedge \rho \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \rho)$  onde  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $\rho$  são fórmulas quaisquer da LP.*

✓ **Exercício 12.** *Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas quaisquer da LP. Prove os sequentes  $\neg \neg (\varphi \wedge \psi) \dashv \vdash (\neg \neg \varphi) \wedge (\neg \neg \psi)$ .*

$$\begin{array}{c}
 \frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge B} (\wedge_e) \quad \frac{(A \wedge B) \wedge C}{A \wedge B} (\wedge_e) \\
 \frac{A \wedge B}{A} (\wedge_e) \quad \frac{A \wedge B}{B} (\wedge_e) \quad \frac{(A \wedge B) \wedge C}{C} (\wedge_e) \\
 \frac{A}{A} \quad \frac{B}{B} \quad \frac{C}{C} \\
 \frac{A \wedge B}{A \wedge (B \wedge C)} (\wedge_i)
 \end{array}$$

**Exercício 9.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\psi)$ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow B \quad [A]^\times (\rightarrow e)}{B} \\
 \frac{\perp}{\neg A} (\neg i) \textcircled{u} \\
 \frac{[ \neg B ]^\times (\neg e) \quad \frac{\perp}{\neg A} (\neg i) \textcircled{u}}{(\neg A) \rightarrow (\neg B)} (\rightarrow i) \textcircled{u}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\varphi \rightarrow \varphi}{(\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi)} (\text{CP})}$$

$$A \rightarrow B \vdash (\neg B) \rightarrow (\neg A)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow B \quad [A]^\times (\rightarrow e)}{B} \\
 \frac{\perp}{\neg A} (\neg i) \textcircled{u} \\
 \frac{[ \neg B ]^\times (\neg e) \quad \frac{\perp}{\neg A} (\neg i) \textcircled{u}}{(\neg B) \rightarrow (\neg A)} (\rightarrow i) \textcircled{u}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{(Ax) \quad (Ax)}{A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B \quad A \vdash A} \\
 \frac{A \rightarrow B, A \vdash B \quad \neg B \vdash \neg B}{A \rightarrow B, \neg B, A \vdash \perp} (\neg i) \\
 \frac{A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A \quad \neg A \vdash \neg A}{A \rightarrow B, \neg A, \neg B \vdash \perp} (\neg i) \\
 \frac{A \rightarrow B, \neg A \vdash \neg B}{A \rightarrow B \vdash (\neg A) \rightarrow (\neg B)} (\rightarrow i)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow B}{(\neg B) \rightarrow (\neg A)} (\text{CP}) \\
 \frac{(\neg B) \rightarrow (\neg A)}{(\neg A) \rightarrow (\neg B)} (\text{CP})
 \end{array}$$

✓ **Exercício 13.** Sejam  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $\rho$  fórmulas quaisquer da LP. Prove que a disjunção é associativa, isto é, prove o seguinte  $(\varphi \vee \psi) \vee \rho \vdash \varphi \vee (\psi \vee \rho)$ .

**Exercício 14.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o seguinte  $\varphi \rightarrow \neg\psi \vdash \psi \rightarrow \neg\varphi$ .

✓ **Exercício 15.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o seguinte  $\vdash (((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$ .

**Exercício 16.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Prove o seguinte  $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi$ .

**Exercício 17.** Seja  $\varphi$  uma fórmula da LP. Construa uma prova para o seguinte  $\neg\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi$ .

**Exercício 18.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o seguinte  $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$ .

**Exercício 19.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o seguinte  $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$ .

**Exercício 20.** Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\delta$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o seguinte  $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\delta \vee \varphi) \rightarrow (\delta \vee \psi)$ .

**Exercício 21.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o seguinte  $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ .

**Exercício 22.** Sejam  $\varphi$  e  $\psi$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o seguinte  $\varphi \wedge \psi \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ .

$$(13) \quad (A \vee B) \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} [\varphi]^{\gamma} \quad [\psi]^{\sigma} \\ \vdots \quad \vdots \\ \varphi \vee \psi \quad \delta_1 \quad \delta_1 \\ \hline \delta_1 \quad (ve) \, u, \sigma \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} (A \vee B) \vee C \quad \frac{[A]^{\gamma} \quad \frac{[A \vee B]^{\gamma} \quad A \vee (B \vee C) \quad (vi)}{A \vee (B \vee C)}}{\frac{A \vee (B \vee C) \quad \frac{[B]^w \quad B \vee C \quad (vi)}{A \vee (B \vee C) \quad (vi)} \quad (ve) \, v, w}{A \vee (B \vee C)}} \quad \frac{[C]^{\kappa} \quad B \vee C \quad (vi)}{A \vee (B \vee C) \quad (vi)} \quad (ve) \, u, \kappa \\ \hline A \vee (B \vee C) \end{array}$$

**Exercício 23.** *Sejam  $\varphi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Construa uma prova para os seguintes*  
 $\neg(\varphi \vee \gamma) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma)$  e  $(\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \vee \gamma)$ .

**Exercício 24.** *Sejam  $\varphi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o seguinte*  
 $(\neg\varphi) \vee (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \wedge \gamma)$ .

**Exercício 25.** *Sejam  $\varphi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o seguinte*  
 $\neg\neg(\varphi \wedge \gamma) \vdash (\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma)$ .

**Exercício 26.** *Sejam  $\varphi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o seguinte*  
 $(\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma) \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \gamma)$ .

**Exercício 27.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Prove o seguinte*  $\varphi \vee (\psi \wedge \gamma) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$ .

**Exercício 28.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Prove o seguinte*  $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \gamma)$ .

**Exercício 29.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Prove o seguinte*  $\varphi \wedge (\psi \vee \gamma) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)$ .

**Exercício 30.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Prove o seguinte*  $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \gamma)$ .

**Exercício 31.** *Seja  $\varphi$  uma fórmula da LP. Prove o seguinte*  $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ .

**Exercício 32.** *Seja  $\varphi$  uma fórmula da LP. Prove o seguinte*  $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ .

**Exercício 33.** *Sejam  $\varphi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Construa uma prova para o seguinte*  
 $(\varphi \rightarrow \gamma) \wedge \neg(\varphi \wedge \gamma) \vdash \neg\varphi$ .

**Exercício 34.** *Sejam  $\varphi, \psi$  e  $\gamma$  fórmulas da LP. Prove o sequente  $\varphi \leftrightarrow \psi, \psi \rightarrow \gamma, \neg\gamma \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$ .*