Lógica Computacional 1 (2025-1)

Flávio L. C. de Moura*

27 de março de 2025

A Lógica Proposicional Minimal

Vamos estudar novos conectivos lógicos além da implicação. A nova gramática terá, além da implicação, uma constante ($\bot$), a negação ($\neg$), a conjunção ($\wedge$) e a disjunção ($\vee$):

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \tag{1}$$

A constante $\bot$ é utilizada para representar a negação: $\neg\varphi$ é o mesmo que $\varphi \to \bot$. Ou seja, temos duas maneiras distintas de escrever a negação, e portanto a gramática acima possui redundâncias. De fato, veremos que existem outras redundâncias na gramática (1), mas elas são úteis porque simplificam a escrita das fórmulas.

A gramática (1) define as fórmulas da LP, e a partir dela consideraremos 3 sublógicas da LP: a minimal, a intuicionista e a clássica. Nesta seção estudaremos a Lógica Proposicional Minimal (LPM), que assim como no fragmento implicacional visto anteriormente, possui uma regra de introdução e uma regra de eliminação para cada um dos conectivos lógicos. Ou seja, uma regra de introdução e uma de eliminação para cada um dos construtores recursivos da gramática (1).

Apesar da gramática apresentada acima não incluir a bi-implicação, este é um conectivo bastante utilizado, e pode ser escrito em função dos outros conectivos: $\varphi \leftrightarrow \psi$ é o mesmo que $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

As regras da negação são análogas às regras da implicação, uma vez que uma negação, digamos $(\neg\varphi)$ é definida como $(\varphi \to \bot)$.

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\,(\neg_i) \qquad\qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \bot}\,(\neg_e)$$

*flaviomoura@unb.br

Veremos posteriormente que apenas com a negação e implicação podemos expressar todos os outros conectivos apresentados na gramática (1), que portanto é uma gramática redundante. No entanto, esta redundância é interessante porque nos permite expressar fórmulas complexas de forma compacta.

A *regra de introdução da conjunção*, denotada por $(\wedge_i)$, nos diz o que precisamos fazer para construir uma prova de um sequente que possui uma conjunção na conclusão, isto é, um sequente da forma $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$, onde Γ é um conjunto finito de fórmulas da LP, e φ_1 e φ_2 são fórmulas da LP. A regra $(\wedge_i)$ é dada pela seguinte regra de inferência:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} \ (\wedge_i)$$

ou seja, uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ é construída a partir de uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_1$ e de uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_2$.

Existem duas regras de eliminação para a conjunção já que podemos extrair qualquer uma das componentes de uma conjunção:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1} \ (\wedge_{e_1}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2} \ (\wedge_{e_2})$$

Estas duas regras podem ser representadas de forma mais concisa da seguinte forma:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} \ (\wedge_e)$$

Usaremos o nome $(\wedge_e)$ para designar a utilização da regra de eliminação da conjunção quando não quisermos especificar qual das regras $(\wedge_{e_1})$ ou $(\wedge_{e_2})$ foi utilizada.

Exemplo 1. *Com as regras da conjunção já podemos fazer um exercício interessante: provar a comutatividade da conjunção, isto é, queremos construir uma prova para o sequente* $\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi$*, onde* φ *e* ψ *são fórmulas quaisquer da LP. A construção da prova é feita inicialmente de baixo para cima com a aplicação da regra* $(\wedge_i)$*:*

$$\dfrac{\dfrac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} \qquad \dfrac{?}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi}}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi}\ (\wedge_i)$$

Concluímos com a regra de eliminação da conjunção e o axioma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi}\ (Ax)}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi}\ (\wedge_e) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi}\ (Ax)}{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi}\ (\wedge_e)}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \varphi}\ (\wedge_i)$$

Exemplo 2. *Sejam* φ *e* ψ *fórmulas quaisquer da LP. Considere o sequente* $\psi \vdash \varphi \to \psi$*. Queremos provar que a partir de uma prova de* ψ *podemos provar qualquer implicação que tenha* ψ *como conclusão:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\ (Ax)\ \dfrac{}{\psi \vdash \psi}\ (Ax)}{\psi, \varphi \vdash \varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)}{\psi, \varphi \vdash \psi}\ (\wedge_e)}{\psi \vdash \varphi \to \psi}\ (\to_i)$$

O sequente do exemplo anterior nos diz que podemos construir a prova de uma implicação a partir de uma prova do consequente desta implicação. Esta prova é utilizada com muita frequência em outras provas, e por esta razão promovemos este sequente ao *status* de regra derivada:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to_i)\emptyset$$

Uma vez que uma bi-implicação corresponde a uma conjunção de duas implicações, ela pode ser decomposta com a regra de eliminação da conjunção:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \rightarrow \varphi_2}\ (\wedge_{e_1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_2 \rightarrow \varphi_1}\ (\wedge_{e_2})$$

Vejamos agora as regras para a disjunção. A *regra de introdução da disjunção* nos permite construir a prova de uma disjunção a partir da prova de qualquer uma das suas componentes:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_{i_1}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_{i_2})$$

Como no caso da regra de eliminação da conjunção podemos representar estas duas regras de forma mais compacta:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$$

A *regra de eliminação da disjunção* nos permite construir a prova de uma fórmula, digamos γ, a partir de uma disjunção. Para isto, precisamos de duas provas distintas de γ, cada uma assumindo uma das componentes da disjunção separadamente:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \Gamma_2, \varphi_1 \vdash \gamma \qquad \Gamma_3, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma}\ (\vee_e)$$

Observe como os contextos mudam em cada um dos sequentes que compõem esta regra.

Exemplo 3. *Vamos mostrar que a disjunção é comutativa, ou seja, queremos construir uma prova para o sequente* $\varphi \lor \psi \vdash \psi \lor \varphi$. *A ideia aqui é utilizarmos a regra* $(\lor_e)$. *Para isto podemos instanciar* Γ *com o conjunto unitário contendo a fórmula* $\varphi \lor \psi$. *Em função da estrutura da regra* $(\lor_e)$, *precisamos construir duas provas distintas de* $\psi \lor \varphi$: *uma a partir de* φ, *e outra a partir de* ψ. *Podemos fazer isto com a ajuda da regra* $(\lor_i)$:

$$\dfrac{(Ax)\,\dfrac{}{\varphi \lor \psi \vdash \varphi \lor \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(Ax)}{\varphi \vdash \psi \lor \varphi}\,(\lor_i) \quad \dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\,(Ax)}{\psi \vdash \psi \lor \varphi}\,(\lor_i)}{\varphi \lor \psi \vdash \psi \lor \varphi}\,(\lor_e)$$

Exemplo 4. *Considere o sequente* $\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$. *Como a fórmula do consequente é uma negação, vamos aplicar a regra de introdução da negação na construção de uma prova de baixo para cima, isto é, da raiz para as folhas da árvore:*

$$\dfrac{\dfrac{?}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \bot}}{\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi}\,(\neg_i)$$

Agora, precisamos construir uma prova do absurdo, e portanto podemos tentar utilizar a regra $(\neg_e)$. *Para isto precisamos escolher uma fórmula do contexto para fazer o papel de* φ *da regra 8 da Tabela 1. A princípio temos três opções:* $\varphi \to \psi$, $\neg\psi$ *e* φ. *A boa escolha neste caso é* $\neg\psi$ *porque podemos facilmente provar* ψ *a partir deste contexto:*

$$\dfrac{\dfrac{(\to_e)\,\dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \psi \vdash \varphi \to \psi}\,(Ax) \quad \dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(Ax)}{\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi} \qquad \dfrac{}{\neg\psi \vdash \neg\psi}\,(Ax)}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \bot}\,(\neg_e)}{\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi}\,(\neg_i)$$

Depois de concluída a prova é fácil entender o que queríamos dizer com boa escolha *acima: Uma boa escolha é um caminho que vai nos permitir concluir uma prova. Mas como fazer uma boa escolha? Isto depende do problema a ser resolvido. Em alguns casos pode ser simples, mas em outros, bastante complicado. O ponto importante a compreender é que existem caminhos possíveis distintos na construção de provas da lógica proposicional, e muito deste processo depende da nossa criatividade.*

O sequente que acabamos de provar ocorre com certa frequência em outras provas, assim como a regra derivada $(\neg\neg_i)$. As regras que são obtidas a partir das regras da Tabela 1 são chamadas de *regras derivadas*. Este é o caso da regra conhecida como *modus tollens* (MT) obtida a partir do sequente do exemplo anterior, onde cada antecedente é generalizado como uma premissa da regra:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma_2 \vdash \neg\psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\varphi}\ (\mathrm{MT})$$

Exemplo 5. *Considere o sequente $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$. Inicialmente, devemos observar que a fórmula que queremos provar é uma implicação, e portanto, o mais natural é tentar aplicar a regra $(\to_i)$, e em seguida aplicar* (MT) *(na construção de baixo para cima) para poder completar a prova:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \to \psi \vdash \varphi \to \psi}\,(Ax) \qquad \dfrac{}{\neg\psi \vdash \neg\psi}\,(Ax)}{\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi}\,(\mathrm{MT})}{\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi}\,(\to_i)$$

A prova que acabamos de fazer é outro caso que aparece com frequência, e corresponde a uma regra conhecida como *contrapositiva*:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\varphi}\ (\mathrm{CP})$$

A Tabela 1 resume todas as regras da LPM, isto é, as regras de introdução e eliminação dos conectivos lógicos apresentados na gramática 1. A Tabela 2 apresenta as regras derivadas provadas nos exemplos anteriores.

Exercício 6. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente $\varphi, \psi \vdash \psi$.*

A solução do exercício anterior nos permite trabalhar com uma versão mais flexível do axioma:

$$\frac{}{\varphi, \psi \vdash \psi}$$

Exercício 7. *Prove o sequente $\vdash (p \to r) \to p \to q \to r$.*

	Regras de introdução	Regras de eliminação
0	$\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\ (\mathrm{Ax})$	
1	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}\ (\wedge_e)$
2	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \Gamma_2, \varphi_1 \vdash \gamma \qquad \Gamma_3, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma}\ (\vee_e)$
3	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to_i)$	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi}\ (\to_e)$
4	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\neg_i)$	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \bot}\ (\neg_e)$

Tabela 1: Regras da Lógica Proposicional Minimal

$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}\ (\neg\neg_i)$	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma_2 \vdash \neg\psi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \neg\varphi}\ (\mathrm{MT})$	$\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to_i)\emptyset$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\varphi}\ (\mathrm{CP})$

Tabela 2: Regras derivadas da Lógica Proposicional Minimal

Exercício 8. *Seja φ uma fórmula da LP. Prove o sequente $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.*

Exercício 9. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente $\varphi \to \psi \vdash (\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\psi)$.*

Exercício 10. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente $\neg\neg(\varphi \to \psi) \vdash (\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\psi)$.*

Exercício 11. *Prove que a conjunção é associativa, isto é, prove o sequente $(\varphi \wedge \psi) \wedge \rho \vdash \varphi \wedge (\psi \wedge \rho)$ onde φ, ψ e ρ são fórmulas quaisquer da LP.*

Exercício 12. *Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer da LP. Prove os sequentes $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash (\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\psi)$.*

Exercício 13. *Sejam φ, ψ e ρ fórmulas quaisquer da LP. Prove que a disjunção é associativa, isto é, prove o sequente* $(\varphi \vee \psi) \vee \rho \vdash \varphi \vee (\psi \vee \rho)$.

Exercício 14. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente* $\varphi \to \neg\psi \vdash \psi \to \neg\varphi$.

Exercício 15. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente* $\vdash ((((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi) \to \psi) \to \psi$.

Exercício 16. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o sequente* $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi$.

Exercício 17. *Seja φ uma fórmula da LP. Construa uma prova para o sequente* $\neg\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi$.

Exercício 18. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente* $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$.

Exercício 19. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente* $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$.

Exercício 20. *Sejam φ, ψ e δ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente* $\varphi \to \psi \vdash (\delta \vee \varphi) \to (\delta \vee \psi)$.

Exercício 21. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente* $\varphi \to \psi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$.

Exercício 22. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente* $\varphi \wedge \psi \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

Exercício 23. *Sejam* φ *e* γ *fórmulas da LP. Construa uma prova para os sequentes* $\neg(\varphi \vee \gamma) \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma)$ *e* $(\neg\varphi) \wedge (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \vee \gamma)$.

Exercício 24. *Sejam* φ *e* γ *fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente* $(\neg\varphi) \vee (\neg\gamma) \vdash \neg(\varphi \wedge \gamma)$.

Exercício 25. *Sejam* φ *e* γ *fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente* $\neg\neg(\varphi \wedge \gamma) \vdash (\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma)$.

Exercício 26. *Sejam* φ *e* γ *fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente* $(\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\gamma) \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \gamma)$.

Exercício 27. *Sejam* φ, ψ *e* γ *fórmulas da LP. Prove o sequente* $\varphi \vee (\psi \wedge \gamma) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma)$.

Exercício 28. *Sejam* φ, ψ *e* γ *fórmulas da LP. Prove o sequente* $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \gamma) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \gamma)$.

Exercício 29. *Sejam* φ, ψ *e* γ *fórmulas da LP. Prove o sequente* $\varphi \wedge (\psi \vee \gamma) \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma)$.

Exercício 30. *Sejam* φ, ψ *e* γ *fórmulas da LP. Prove o sequente* $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \gamma) \vdash \varphi \wedge (\psi \vee \gamma)$.

Exercício 31. *Seja* φ *uma fórmula da LP. Prove o sequente* $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$.

Exercício 32. *Seja* φ *uma fórmula da LP. Prove o sequente* $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Exercício 33. *Sejam* φ *e* γ *fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente* $(\varphi \to \gamma) \wedge \neg(\varphi \wedge \gamma) \vdash \neg\varphi$.

Exercício 34. *Sejam* φ, ψ *e* γ *fórmulas da LP. Prove o sequente* $\varphi \leftrightarrow \psi, \psi \rightarrow \gamma, \neg\gamma \vdash (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$.