

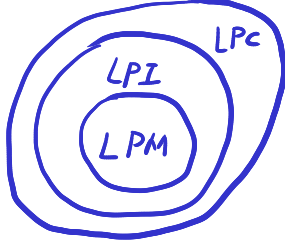
Lógica Computacional 1 (2025-1)

Flávio L. C. de Moura*

28 de abril de 2025

1 A Lógica Proposicional Clássica

A Lógica Proposicional Clássica (LPC) é uma extensão da Lógica Proposicional Intuicionista feita a partir da adição da regra de **eliminação do absurdo clássico**, que também é conhecida como prova por contradição:



Notação com sequentes	Notação padrão
$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} \text{ (PBC)}$	$\frac{[\neg\varphi]^u}{\varphi} \text{ (PBC)}_u$

$$LPM + (\perp_e) = LPI$$

$$LPM + (PBC) = LPC.$$

A Tabela 1 apresenta as regras da LPC.

O leitor mais atento deve ter observado que a Tabela 1 não contém a regra de eliminação do absurdo intuicionista ($\perp_e$). Mas ela não deveria fazer parte desta tabela uma vez que a LPC é uma extensão da LPI? Sim, e o fato de ($\perp_e$) não fazer parte desta tabela é justificado pelo exercício a seguir:

Exercício 1. *Mostre que a regra da explosão ($\perp_e$) pode ser provada utilizando as regras da Tabela 1. Ou seja, prove o sequente $\perp \vdash A$, onde A é uma fórmula qualquer utilizando as regras da Tabela 1.*

Acabamos de caracterizar a lógica proposicional clássica como sendo a lógica proposicional intuicionista juntamente com a eliminação do absurdo clássico (ver Tabela 1), mas outras caracterizações são possíveis. Por exemplo, outra caracterização possível é utilizando a **regra de eliminação da dupla negação** ao invés de **(PBC)**.

*flaviomoura@unb.br

Exercício:

$$\frac{\perp}{\vdash A} \text{ (m)} \text{ + PBC}$$

$$\frac{\perp \quad [\neg A]^{(1)}}{\perp \wedge \neg A} \text{ (}\wedge\text{)} \quad \frac{}{\perp} \text{ (}\perp\text{)} \quad \frac{}{A} \text{ (PBC)u}$$

Ex2: $(\neg A) \rightarrow \perp \vdash A$
 $\text{ (m)} \text{ + (}\neg\text{e)}$

$$\frac{(\neg A) \rightarrow \perp \quad [\neg A]^{(1)}}{\perp} \text{ (}\rightarrow\text{e)} \quad \frac{\perp}{\neg A} \text{ (}\neg\text{i)} \text{u} \quad \frac{\neg A}{A} \text{ (}\neg\text{e)}$$

$$\frac{\frac{(\neg A) \rightarrow \perp \vdash (\neg A) \rightarrow \perp \quad \frac{}{\neg A \vdash \neg A} \text{ (}\rightarrow\text{e)}}{(\neg A) \rightarrow \perp, \neg A \vdash \perp} \text{ (}\rightarrow\text{e)} \quad \frac{}{\neg A \vdash \perp} \text{ (}\neg\text{i)} \quad \frac{(\neg A) \rightarrow \perp \vdash \neg A}{(\neg A) \rightarrow \perp \vdash A} \text{ (}\neg\text{e)}$$

$\neg\neg A$

Ex: $\vdash A \vee (\neg A)$
 $\text{ (m)} \text{ + (}\neg\text{e)}$

$$\frac{[A]^{(1)}}{A \vee \neg A} \text{ (}\vee\text{i)} \quad \frac{A \vee \neg A \quad [\neg(A \vee \neg A)]^{(2)}}{\perp} \text{ (}\neg\text{e)} \quad \frac{\perp}{\neg A} \text{ (}\neg\text{i)} \text{u} \quad \frac{\neg A}{A \vee (\neg A)} \text{ (}\vee\text{i)} \quad \frac{A \vee (\neg A) \quad [\neg(A \vee (\neg A))]^{(3)}}{\perp} \text{ (}\neg\text{e)} \quad \frac{\perp}{\neg\neg(A \vee (\neg A))} \text{ (}\neg\text{i)} \text{u} \quad \frac{\neg\neg(A \vee (\neg A))}{A \vee (\neg A)} \text{ (}\neg\text{e)}$$

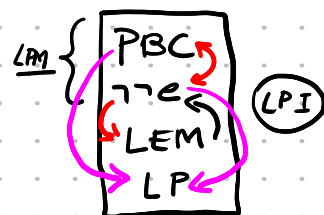
Ex: $\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} \text{ (}\neg\text{e)}$

$$\boxed{(\neg\neg\varphi) \Rightarrow (\text{PBC})}$$

$$\neg\neg A \vdash A \text{ (m)} \text{ + PBC}$$

$$\frac{\neg\neg A \quad [\neg A]^{(1)}}{\perp} \text{ (}\neg\text{e)} \quad \frac{}{\perp} \text{ (}\perp\text{)} \quad \frac{}{A} \text{ (PBC)u}$$

$$\boxed{\frac{}{A \vee (\neg A)} \text{ (LEM)}} \quad \leftarrow (\neg\neg\text{e})$$



$$\underline{\text{Ex:}} \quad \neg\neg A \vdash A$$

$$\frac{\frac{A \vee \neg A \quad (LEM)}{A} \quad \frac{\frac{[\neg A]^\sigma \quad \neg\neg A \quad (\neg e)}{\perp} \quad (\perp e)}{A} \quad (\ve e) \quad \text{u, } \sigma$$

$$LPM + (\neg\neg e) = LPC$$

$$LPM + (PBC) = LPC$$

$$\underbrace{LPM + (\perp e)}_{LPI} + (LEM) = LPC$$

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$\rightarrow$$

A	B	A → B	(A → B) → A	((A → B) → A) → A
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

$$\frac{\frac{[\neg A]^\sigma \quad [\neg A]^\omega}{\perp} \quad (\neg e) \quad \frac{\perp}{B} \quad (\perp e) \quad \frac{B}{A \rightarrow B} \quad (\rightarrow i) \quad \sigma}{\frac{[(A \rightarrow B) \rightarrow A]^\mu}{A} \quad (\rightarrow e)} \quad \frac{A \quad [\neg A]^\omega}{\perp} \quad (\neg e) \quad \frac{\perp}{A} \quad (PBC) \omega \quad \frac{A}{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} \quad (\rightarrow i) \quad u$$

$$\frac{\frac{[\neg A]^\sigma \quad [\neg A]^\omega}{\perp} \quad (\neg e) \quad \frac{\perp}{B} \quad (\perp e) \quad \frac{B}{A \rightarrow B} \quad (\rightarrow i) \quad \sigma}{\frac{[(A \rightarrow B) \rightarrow A]^\mu}{A} \quad (\rightarrow e)} \quad \frac{A \quad [\neg A]^\omega}{\perp} \quad (\neg e) \quad \frac{\perp}{\neg\neg A} \quad (\neg i) \omega \quad \frac{\neg\neg A}{A} \quad (\neg e) \quad \frac{A}{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} \quad (\rightarrow i) \quad u$$

$$\left. \begin{matrix} (PBC) \\ (\neg\neg e) \end{matrix} \right\} \Rightarrow LP$$

$$\vdash A \vee (\neg A)$$

$$\frac{\frac{[(A \vee (\neg A)) \rightarrow A]^\mu \quad \frac{[\neg A]^\sigma}{A \vee (\neg A)} \quad (\ve i)}{A} \quad (\rightarrow e)}{\frac{A \quad [\neg A]^\sigma}{\perp} \quad (\neg e)} \quad \frac{\perp}{A \vee (\neg A)} \quad (\ve i) \quad \frac{A \vee (\neg A)}{((A \vee (\neg A)) \rightarrow A) \rightarrow (A \vee (\neg A))} \quad (\rightarrow i) \quad u \quad \frac{((A \vee (\neg A)) \rightarrow A) \rightarrow (A \vee (\neg A))}{A \vee (\neg A)} \quad (\ve e)$$

$$\neg\neg A \vdash A$$

$$A \rightarrow \perp = \neg A$$

$$\frac{\frac{[\neg A]^\mu \quad \neg\neg A}{\perp} \quad (\neg e) \quad \frac{\perp}{A} \quad (\perp e)}{\frac{A}{(A \rightarrow \perp) \rightarrow A} \quad (\rightarrow i) \quad u} \quad \frac{(A \rightarrow \perp) \rightarrow A}{((A \rightarrow \perp) \rightarrow A) \rightarrow A} \quad (LP) \quad \frac{((A \rightarrow \perp) \rightarrow A) \rightarrow A}{A} \quad (\rightarrow e)$$

	Notação com seqüentes	Notação padrão
1	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \quad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$	$\frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$
2	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$	$\frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$
3	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$	$\frac{\varphi_{i \in \{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$
4	$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma \quad \Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} (\vee_e)$	$\frac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \begin{array}{c} [\varphi_1]^u \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} [\varphi_2]^v \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{\gamma} (\vee_e) u, v$
5	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i)$	$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) u$
6	$\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} (\rightarrow_e)$	$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} (\rightarrow_e)$
7	$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} (\neg_i)$	$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi} (\neg_i) u$
8	$\frac{\Gamma \vdash \neg \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \perp} (\neg_e)$	$\frac{\neg \varphi \quad \varphi}{\perp} (\neg_e)$
9	$\frac{\Gamma, \neg \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} (\text{PBC})$	$\frac{\begin{array}{c} [\neg \varphi]^u \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} (\text{PBC}) u$

Tabela 1: Regras da Lógica Clássica (versão 2)

Notação com seqüentes	Notação padrão
$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi} (\neg\neg_e)$	$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} (\neg\neg_e)$

Em outras palavras, as regras $\neg$ e $(\neg\neg_e)$ são equivalentes.

Exercício 2. *Substitua a regra 9 (PBC) na Tabela 1 pela regra $(\neg\neg_e)$, e prove $\neg\varphi \rightarrow \perp \vdash \varphi$ (prova por contradição).*

Uma outra caracterização possível da LPC envolve a chamada *lei de Peirce* (LP) (juntamente com $(\perp_e)$):

Notação com seqüentes	Notação padrão
$\frac{}{\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi} (LP)$	$\frac{}{((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi} (LP)$

Uma outra caracterização possível da LPC envolve a chamada *lei do terceiro excluído* (LEM) (juntamente com $(\perp_e)$):

Notação com seqüentes	Notação padrão
$\frac{}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi} (LEM)$	$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi} (LEM)$

Exercício 3. *Assuma a regra (LP) acima, e prove o seqüente $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ utilizando as regras da LPI.*

Exercício 4. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove $\varphi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.*

Exercício 5. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove $\varphi \rightarrow \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \vee \psi$.*

Exercício 6. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove o seqüente $(\neg\varphi) \rightarrow \psi \vdash (\neg\psi) \rightarrow \varphi$.*

Exercício 7. *Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer da LP. Prove os seqüentes $\neg\neg(\varphi \vee \psi) \dashv\vdash (\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi)$.*

Exercício 8. $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi \vdash \perp$

Exercício 9. $(\neg\varphi) \rightarrow (\neg\psi) \vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)$

Exercício 10. *Sejam φ e ψ fórmulas quaisquer da LP. Mostre que o sequente $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\neg\varphi) \vee \psi$ não possui uma derivação intuicionista.*