Lógica Computacional 1 (2025-1)

Flávio L. C. de Moura*

28 de abril de 2025

1 A Lógica Proposicional Clássica

A Lógica Proposicional Clássica (LPC) é uma extensão da Lógica Proposicional Intuicionista feita a partir da adição da regra de eliminação do absurdo clássico, que também é conhecida como prova por contradição:

Notação com sequentes	Notação padrão
$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}$ (PBC)	$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}$ (PBC)u

A Tabela 1 apresenta as regras da LPC.

O leitor mais atento deve ter observado que a Tabela 1 não contém a regra de eliminação do absurdo intuicionista ($\bot_e$). Mas ela não deveria fazer parte desta tabela uma vez que a LPC é uma extensão da LPI? Sim, e o fato de ($\bot_e$) não fazer parte desta tabela é justificado pelo exercício a seguir:

Exercício 1. *Mostre que a regra da explosão ($\bot_e$) pode ser provada utilizando as regras da Tabela 1. Ou seja, prove o sequente $\bot \vdash A$, onde A é uma fórmula qualquer utilizando as regras da Tabela 1.*

Acabamos de caracterizar a lógica proposicional clássica como sendo a lógica proposicional intuicionista juntamente com a eliminação do absurdo clássico (ver Tabela 1), mas outras caracterizações são possíveis. Por exemplo, outra caracterização possível é utilizando a regra de eliminação da dupla negação ao invés de .

*flaviomoura@unb.br

	Notação com sequentes	Notação padrão
1	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi_1 \qquad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)$
2	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}\ (\wedge_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i\in\{1,2\}}}\ (\wedge_e)$
3	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$
4	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ (\vee_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \begin{matrix}[\varphi_1]^u \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\varphi_2]^v \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\ (\vee_e)\ u, v$
5	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow_i)$	$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow_i) u$
6	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\rightarrow_e)$	$\dfrac{\varphi \rightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}\ (\rightarrow_e)$
7	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\neg_i)$	$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$
8	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$	$\dfrac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
9	$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ \text{(PBC)}$	$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\ \text{(PBC)u}$

Tabela 1: Regras da Lógica Clássica (versão 2)

Notação com sequentes	Notação padrão
$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\neg\neg_e)$	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$

Em outras palavras, as regras e $(\neg\neg_e)$ são equivalentes.

Exercício 2. *Substitua a regra 9 (PBC) na Tabela 1 pela regra* $(\neg\neg_e)$*, e prove* $\neg\varphi \to \bot \vdash \varphi$ *(prova por contradição).*

Uma outra caracterização possível da LPC envolve a chamada *lei de Peirce* (LP) (juntamente com $(\bot_e)$):

Notação com sequentes	Notação padrão
$\dfrac{}{\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi}\ (\mathrm{LP})$	$\dfrac{}{((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi}\ (\mathrm{LP})$

Uma outra caracterização possível da LPC envolve a chamada *lei do terceiro excluído* (LEM) (juntamente com $(\bot_e)$):

Notação com sequentes	Notação padrão
$\dfrac{}{\vdash \varphi \vee \neg\varphi}\ (\mathrm{LEM})$	$\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ (\mathrm{LEM})$

Exercício 3. *Assuma a regra (LP) acima, e prove o sequente* $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ *utilizando as regras da LPI.*

Exercício 4. *Sejam* φ *e* ψ *fórmulas da LP. Prove* $\varphi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

Exercício 5. *Sejam* φ *e* ψ *fórmulas da LP. Prove* $\varphi \to \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \vee \psi$.

Exercício 6. *Sejam* φ *e* ψ *fórmulas da LP. Prove o sequente* $(\neg\varphi) \to \psi \vdash (\neg\psi) \to \varphi$.

Exercício 7. *Sejam* φ *e* ψ *fórmulas quaisquer da LP. Prove os sequentes* $\neg\neg(\varphi \vee \psi) \dashv\vdash (\neg\neg\varphi) \vee (\neg\neg\psi)$.

Exercício 8. $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi \vdash \bot$

Exercício 9. $(\neg\varphi) \to (\neg\psi) \vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$

Exercício 10. *Sejam* φ *e* ψ *fórmulas quaisquer da LP. Mostre que o sequente* $\varphi \to \psi \vdash (\neg\varphi) \vee \psi$ *não possui uma derivação intuicionista.*