

Exercício 5: $\vdash \neg \neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[A]^{u_1}}{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} (\rightarrow i) \phi}{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} (\rightarrow e)}{[\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)]^{u_2}} \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{\perp}{B} (\perp e)}{A \rightarrow B} (\rightarrow i) \omega}{[(A \rightarrow B) \rightarrow A]^{u_3}} (\rightarrow e)}{[\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)]^{u_2}} \\
 \frac{\frac{A}{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} (\rightarrow i) \sigma}{[\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)]^{u_2}} (\neg e) \\
 \frac{\perp}{\neg \neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)} (\neg i) u
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{(A_x)}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow A} \quad \frac{(A_x)}{A \vdash A} (\neg i)}{(A \rightarrow B) \rightarrow A, A \vdash A \wedge ((A \rightarrow B) \rightarrow A)} (\wedge e)}{\frac{(A_x) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow A, A \vdash A}{A \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} (\rightarrow i)} (\neg e) \\
 \frac{\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \vdash \neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)}{\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A), A \vdash \perp} (\perp e) \\
 \frac{\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A), A \vdash \perp}{\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A), A \vdash B} (\rightarrow i) \\
 \frac{\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \vdash A \rightarrow B \quad (A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow A}{\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A), (A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A} (\rightarrow e) \\
 \frac{\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \vdash \neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \quad \neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A}{\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \vdash \perp} (\neg e) \\
 \frac{\neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A) \vdash \perp}{\vdash \neg \neg (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)} (\neg i)
 \end{array}$$

$$\frac{\perp}{\varphi} (\perp e)$$

$$\frac{\frac{[\neg \varphi]^{u_1}}{\vdots} \perp}{\varphi} (PPC) u$$