Lógica Computacional 1 (2025-1)

Flávio L. C. de Moura*

3 de abril de 2025

A Lógica Proposicional Intuicionista

A Lógica Proposicional Intuicionista (LPI) tem como sistema dedutivo as regras da LPM juntamente com a regra de eliminação do absurdo intuicionista, também conhecida como regra da explosão:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\,(\bot_e)$$

Assim, as provas em dedução natural na LPI são construídas utilizando as regras da Tabela 1

O sistema de dedução natural visto anteriormente utiliza uma notação de sequentes. Nesta notação, o contexto aparece no mesmo nível da fórmula que está sendo provada. A desvantagem desta notação é ter que explicitar o contexto em cada nó da árvore de prova. Nesta seção, vamos apresentar uma notação equivalente à anterior onde o contexto não aparece de forma explícita[3, 2, 4, 1]. Para motivarmos a vantagem da nova notação, considere a prova da associatividade da conjunção, isto é, do sequente $(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash \phi \wedge (\psi \wedge \varphi)$:

$$\dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(Ax)\,\dfrac{}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash (\phi \wedge \psi) \wedge \varphi}}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash \phi \wedge \psi}}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash \phi} \qquad \dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(\wedge_e)\,\dfrac{(Ax)\,\dfrac{}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash (\phi \wedge \psi) \wedge \varphi}}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash \phi \wedge \psi}}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash (\phi \wedge \psi) \wedge \varphi}\,(Ax)}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash \varphi}\,(\wedge_e)}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash (\psi \wedge \varphi)}\,(\wedge_i)}{(\phi \wedge \psi) \wedge \varphi \vdash \phi \wedge (\psi \wedge \varphi)}\,(\wedge_i)$$

Observe que o contexto, isto é, o antecedente de cada um dos sequentes desta prova é o mesmo, e como o que muda ao longo da prova é o consequente dos sequentes, podemos colocar nosso foco

*flaviomoura@unb.br

	Regras de introdução	Regras de eliminação
0	$\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\ (\mathrm{Ax})$	
1	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi_1 \land \varphi_2}\ (\land_i)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \land \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}\ (\land_e)$
2	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \lor \varphi_2}\ (\lor_i)$	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \lor \varphi_2 \qquad \Gamma_2, \varphi_1 \vdash \gamma \qquad \Gamma_3, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vdash \gamma}\ (\lor_e)$
3	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to_i)$	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi}\ (\to_e)$
4	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\neg_i)$	$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma_2 \vdash \varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \bot}\ (\neg_e)$
5		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\bot_e)$

Tabela 1: Regras da Lógica Proposicional Intuicionista

na parte que é modificada e remover os contextos da prova deixando-a mais limpa e compacta:

$$\dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\phi \land \psi) \land \varphi}{(\phi \land \psi)}}{\phi} \qquad \dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\land_e)\,\dfrac{(\phi \land \psi) \land \varphi}{\phi \land \psi}}{\psi} \qquad \dfrac{(\phi \land \psi) \land \varphi}{\varphi}\,(\land_e)}{(\psi \land \varphi)}\,(\land_i)}{\phi \land (\psi \land \varphi)}\,(\land_i)$$

A remoção do contexto em provas como a do exemplo anterior é trivial porque, como o contexto não muda, e ele é dado no enunciado do sequente a ser provado, ou nas folhas da árvore de derivação, e portanto nenhuma informação é perdida. Mas será que é possível sempre remover os contextos das provas de uma forma sistemática? Sim! Mas então como lidar com as regras $(\neg_i)$, $(\to_i)$ e $(\lor_e)$ que mudam o contexto? Vejamos um exemplo:

Exemplo 1. *Considere novamente o sequente $\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$ que foi provado em um exemplo anterior utilizando a notação de sequentes. Se simplesmente apagarmos os contextos, obtemos a seguinte árvore de derivação:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\,(\to_e) \qquad \neg\psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_i)$$

Agora vamos inferir o contexto em cada nó da árvore considerando o comportamento das regras da Tabela **??**. *Vamos fazer isto das folhas para a raiz considerando apenas a árvore de derivação acima. Como a árvore possui três folhas, cada uma contendo uma fórmula distinta, o contexto das folhas é o conjunto contendo as três fórmulas, ou seja, o conjunto $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi\}$. Como a regra $(\to_e)$ preserva o mesmo contexto, o contexto da fórmula ψ, na linha 2, é também o conjunto $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi\}$. Da mesma forma, a regra $(\neg_e)$ preserva o contexto, e portanto o contexto da fórmula $\bot$ é também o conjunto $\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi\}$. Já a regra $(\neg_i)$ adiciona uma fórmula ao contexto (leitura de baixo para cima), ou remove uma fórmula do contexto, se a leitura for feita de cima para baixo. Neste caso, a fórmula removida é φ, e portanto o contexto da fórmula $\neg\varphi$ (raiz da árvore) é o conjunto $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$ como esperado. Na árvore de derivação acima, não existe nenhuma informação explícita de que a fórmula φ é eliminada do contexto. Podemos inferir isto porque conhecemos o comportamento da regra $(\neg_i)$, mas em uma árvore maior onde várias fórmulas sejam removidas do contexto a leitura da árvore de derivação pode se tornar bastante confusa. Para facilitar a leitura de qual fórmula é eliminada, e em qual passo, podemos marcar as fórmulas que são eliminadas:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi \qquad [\varphi]}{\psi}\,(\to_e) \qquad \neg\psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_i)$$

e agora fica claro que a fórmula φ não faz parte do contexto original do sequente a ser provado. Note que os colchetes são colocados ***apenas nas folhas*** *que contêm fórmulas que não fazem parte do contexto dado pelo problema. Em outras palavras, os colchetes são utilizados para marcar fórmulas que são hipóteses temporárias, ou seja, que em determinado momento serão removidas do contexto. Em uma situação geral, podem existir diversas fórmulas para serem descartadas, e por regras distintas. Para que fique claro o escopo de cada fórmula, precisamos de um mecanismo para nos informar quando as fórmulas marcadas com os colchetes são* ***removidas*** *(ou* ***descartadas****) do contexto. No exemplo acima, isto ocorre ao aplicarmos a regra $(\neg_i)$. Então, utilizaremos um símbolo qualquer para registrar este fato. Neste exemplo utilizamos como símbolo a letra u:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi \qquad [\varphi]^u}{\psi}\,(\to_e) \qquad \neg\psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\varphi}\,(\neg_i)\ u$$

Agora sabemos que hipótese $[\varphi]^u$ foi descartada durante a aplicação da regra $(\neg_i)$ u na árvore de derivação.

	Notação com sequentes	Notação padrão
1	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \qquad \Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi_1 \qquad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\ (\wedge_i)$
2	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}\ (\wedge_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i\in\{1,2\}}}\ (\wedge_e)$
3	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee_i)$
4	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \Gamma, \varphi_1 \vdash \gamma \qquad \Gamma, \varphi_2 \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ (\vee_e)$	$\dfrac{\varphi_1 \vee \varphi_2 \qquad \begin{array}{c}[\varphi_1]^u \\ \vdots \\ \gamma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi_2]^v \\ \vdots \\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ (\vee_e)\ u, v$
5	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to_i)$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i) u$
6	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\to_e)$	$\dfrac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}\ (\to_e)$
7	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\neg_i)$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$
8	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\varphi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_e)$	$\dfrac{\neg\varphi \qquad \varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
9	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\bot_e)$	$\dfrac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e)$

Tabela 2: Regras da Lógica Proposicional Intuicionista

A seguir, veremos exemplos mais complexos onde fórmulas idênticas podem exigir marcas distintas, mas antes disto compare as regras de dedução natural para a lógica proposicional minimal com notação de sequente, e com a notação padrão na Tabela 2. Observe como o mecanismo de descarte simula a mudança de contexto antes e depois de uma aplicação das regras $(\vee_e)$, $(\to_i)$ e $(\neg_i)$. Como a notação padrão (contextos implícitos) é mais compacta, a partir deste momento não utilizaremos mais a notação com sequentes. A intenção de iniciar este trabalho utilizando a notação com sequentes foi para permitir uma explicação mais fácil e natural para o processo de descarte de hipóteses, que sempre gera muitas dúvidas entre os alunos. Por exemplo, se a razão do descarte não está clara, é comum aparecerem árvores de derivação com descarte de hipóteses feito em regras como $(\wedge_i)$, $(\wedge_e)$, $(\vee_i)$, $(\to_e)$ e $(\neg_e)$. Se você acha que está tudo bem uma árvore de derivação conter descarte de hipóteses nas regras citadas na frase anterior, volte para o início deste capítulo e reinicie o estudo do sistema de dedução natural antes de prosseguir :-)

Exercício 2. *Seja φ uma fórmula da LP. Construa uma prova para o sequente $\vdash \neg\neg(\neg\neg\varphi \to \varphi)$ na LPI.*

Exercício 3. *Seja φ uma fórmula da LP. Construa uma prova para o sequente $\vdash \neg\neg((\neg\varphi)\vee\varphi)$ na LPI.*

Exercício 4. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente $(\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\psi) \vdash \neg\neg(\varphi \to \psi)$ na LPI.*

Exercício 5. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Construa uma prova para o sequente $\vdash \neg\neg(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$ na LPI.*

Referências

[1] M. Ayala-Rincón and F. L. C. de Moura. *Applied Logic for Computer Scientists - Computational Deduction and Formal Proofs*. UTCS. Springer, 2017.

[2] F. S. C. da Silva, A. C. V. de Melo, and M. Finger. *Lógica Para Computação*. THOMSON PIONEIRA, 2006.

[3] M. Huth and M. Ryan. *Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning About Systems*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2004.

[4] D. van Dalen. *Logic and Structure (4. Ed.)*. Universitext. Springer, 2008.

$(\neg\neg A)\to(\neg\neg B) \dashv\vdash \neg\neg(A\to B)$

1. $(\neg\neg A)\to(\neg\neg B) \vdash_i \neg\neg(A\to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\neg\neg A)\to(\neg\neg B) \qquad \dfrac{[A]^u}{\neg\neg A}(\neg\neg i)}{\neg\neg B}(\to e)}{B}(\neg\neg e)}{A\to B}(\to i)\ u}{\neg\neg(A\to B)}(\neg\neg i)$$

clássica

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg A\to\neg\neg B \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(A\to B)]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^v \quad [\neg A]^w}{\bot}(\neg e)}{B}(\bot e)}{A\to B}(\to i)\ v}{\bot}(\neg e)}{\neg\neg A}(\neg i)\ w}{\neg\neg B}(\to e) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^x \quad [A]^y}{B\wedge A}(\wedge i)}{B}(\wedge e)}{A\to B}(\to i)\ y \qquad [\neg(A\to B)]^u}{\bot}(\neg e)}{\neg B}(\neg i)\ x}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(A\to B)}(\neg i)\ u}(\neg e)$$

Considere os sequentes $A\to B \dashv\vdash (\neg A)\vee B$. Construa uma prova intuicionista para cada um deles se for possível. Mas justifique se algum deles não tiver prova intuicionista.

1. $A\to B \vdash_c (\neg A)\vee B$

$$\dfrac{\dfrac{}{A\vee(\neg A)}(LEM) \qquad \dfrac{\dfrac{A\to B \quad [A]^u}{B}(\to e)}{(\neg A)\vee B}(\vee i) \qquad \dfrac{[\neg A]^v}{(\neg A)\vee B}(\vee i)}{(\neg A)\vee B}(\vee e)\ u, v$$

$$\dfrac{A\to B}{(\neg A)\vee B}(R)$$

$\vdash_{i+R} (\neg c)\vee c$

$$\dfrac{\dfrac{[c]^u}{c\to c}(\to i)\ u}{(\neg c)\vee c}(R)$$

2. $(\neg A)\vee B \vdash_i A\to B$.

$$\dfrac{(\neg A)\vee B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^x \quad [A]^w}{\bot}(\neg e)}{B}(\bot e)}{A\to B}(\to i)\ w \qquad \dfrac{[B]^y}{A\to B}(\to i)\ \emptyset}{A\to B}(\vee e)\ x, y$$

Considere o sequente $\vdash A \to B \to B \to A \to B$. Construa uma prova intuicionista se for possível, e justifique, caso contrário.

$$\boxed{\dfrac{A}{B \to A}(\to_i)\,\emptyset}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad [B]^u}{A \land B}(\land_i)}{A}(\land_e)}{B \to A}(\to_i)\,u$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^x \quad [B]^u}{A \land B}(\land_i)}{B}(\land_e)}{A \to B}(\to_i)\,x}{B \to (A \to B)}(\to_i)\,u}{B \to B \to A \to B}(\to_i)\,\emptyset}{A \to (B \to (B \to (A \to B)))}(\to_i)\,\emptyset$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^x \quad [B]^u}{A \land B}(\land_i)}{B}(\land_e)}{A \to B}(\to_i)\,x}{B \to A \to B}(\to_i)\,u \quad [B]^v}{(B \to A \to B) \land B}(\land_i)}{B \to A \to B}(\land_e)}{B \to B \to A \to B}(\to_i)\,v \quad [A]^y}{(B \to B \to A \to B) \land A}(\land_i)}{B \to B \to A \to B}(\land_e)}{A \to B \to B \to A \to B}(\to_i)\,y$$