

Lógica Computacional 1 (2025-2)

Primeira Avaliação Escrita

Prof. Flávio L. C. de Moura

Construa uma prova no sistema de **Dedução Natural** para cada um dos sequentes a seguir **E** responda se cada um dos sequentes possui ou não uma prova intuicionista. Observe que apenas apresentar uma prova clássica não é suficiente para garantir que um sequente não tem prova intuicionista.

1. (2.5 pontos) $A \rightarrow B \vdash (\neg A) \vee B$

Solução

O sequente possui a seguinte prova clássica:

$$(LEM) \frac{\frac{A \rightarrow B \quad [A]^u}{B} (\rightarrow_e) \quad \frac{[\neg A]^v}{(\neg A) \vee B} (\vee_i)}{A \vee (\neg A)} \quad \frac{(\neg A) \vee B}{(\neg A) \vee B} (\vee_e) u, v$$

Ele não possui prova intuicionista porque ele nos permite provar (LEM) utilizando apenas regras intuicionistas:

$$\frac{[A]^u}{A \rightarrow A} (\rightarrow_i) u \quad \frac{A \rightarrow A}{(\neg A) \vee A} (R)$$

2. (2.5 pontos) $(\neg A) \vee B \vdash A \rightarrow B$

Solução

O sequente é intuicionista:

$$\frac{(\neg A) \vee B \quad \frac{\frac{[\neg A]^v}{\perp} (\neg_e) \quad \frac{[A]^u}{B} (\perp_e)}{A \rightarrow B} (\rightarrow_i) u \quad \frac{[B]^w}{A \rightarrow B} (\rightarrow_i) \emptyset}{A \rightarrow B} (\vee_e) v, w$$

3. (2.5 pontos) $\neg(A \wedge B) \vdash (\neg A) \vee (\neg B)$

Solução

O sequente possui a seguinte prova clássica:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{[A]^x \wedge [B]^u}{A \wedge B} (\wedge_i)}{\neg(A \wedge B)} (\neg_e)}{\perp} (\neg_i) \quad x}{\neg A} (\neg_i) \quad x \\
 \frac{\frac{[B \vee (\neg B)]}{B \vee (\neg B)} (\text{LEM}) \quad \frac{\frac{[\neg B]^v}{(\neg A) \vee (\neg B)} (\vee_i)}{(\neg A) \vee (\neg B)} (\vee_e) \quad u, v}{(\neg A) \vee (\neg B)} (\vee_e) \quad u, v
 \end{array}$$

Ele não possui prova intuicionista porque ele nos permite provar uma instância de (LEM) utilizando apenas regras intuicionistas:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[A \wedge (\neg A)]^u}{A} (\wedge_e) \quad \frac{[A \wedge (\neg A)]^u}{\neg A} (\wedge_e)}{\perp} (\neg_e) \\
 \frac{\perp}{\neg(A \wedge (\neg A))} (\neg_i) \quad u \\
 \frac{\neg(A \wedge (\neg A))}{(\neg A) \vee (\neg \neg A)} (R)
 \end{array}$$

4. (2.5 pontos) $(\neg A) \vee (\neg B) \vdash \neg(A \wedge B)$

Solução

O sequente é intuicionista:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[A \wedge B]^u}{A} (\wedge_e) \quad \frac{[\neg A]^v}{\perp} (\neg_e)}{\perp} (\neg_i) \quad u \quad \frac{\frac{[A \wedge B]^u}{B} (\wedge_e) \quad \frac{[\neg B]^w}{\perp} (\neg_e)}{\perp} (\neg_i) \quad w}{(\neg A) \vee (\neg B)} (\vee_e) \quad v, w
 \end{array}$$

Regras da Lógica Clássica

1	$\frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} (\wedge_i)$
2	$\frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_{i \in \{1,2\}}} (\wedge_e)$
3	$\frac{\varphi_{i \in \{1,2\}}}{\varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_i)$
4	$\frac{[\varphi_1]^u \quad [\varphi_2]^v \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \gamma \end{array}}{\varphi_1 \vee \varphi_2} (\vee_e) u, v$
5	$\frac{[\varphi]^u \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) u$
6	$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} (\rightarrow_e)$
7	$\frac{[\varphi]^u \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi} (\neg_i) u$
8	$\frac{\neg \varphi \quad \varphi}{\perp} (\neg_e)$
9	$\frac{\perp}{\varphi} (\perp_e)$
10	$\frac{[\neg \varphi]^u \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} (PBC) u$