

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Ciência da Computação



UnB

Lógica Computacional 1 (2026/1) Segunda Avaliação - Parte objetiva

14 de julho de 2026

Nome: _____

Matrícula: _____

• Instruções:

- Esta avaliação é **individual** e **sem consulta**;
- Selecione apenas 1 item por questão.
 - * Questões com mais de 1 item selecionado serão **anuladas**;
- Tempo de duração: 15 minutos.

Exercício 1. Na Dedução Natural para a Lógica de Primeira Ordem (LPO), a regra de eliminação do quantificador existencial ($\exists_e$) é definida como:

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi(x_0)]^u \\ \vdots \\ \exists_x \varphi(x) \quad \gamma \end{array}}{\gamma} (\exists_e) u \quad \text{onde } x_0 \text{ é uma variável nova que não ocorre em } \gamma.$$

Assinale a alternativa que interpreta corretamente a restrição imposta por essa regra.

- (a) A restrição exige apenas que x_0 não ocorra em γ ; ela pode ocorrer livremente em hipóteses não-descartadas do contexto, pois essas hipóteses não fazem parte da conclusão.
- (b) A expressão "variável nova" é puramente notacional: basta renomear x_0 se houver conflito de nomes, sem qualquer consequência para a validade da derivação.
- (c) A condição " x_0 não ocorre em γ " garante que a conclusão γ não faça referência ao testemunho específico de $\exists_x \varphi(x)$, tornando a prova válida para qualquer testemunho possível.
- (d) A restrição é equivalente a exigir que x_0 seja uma variável ligada em γ , pois variáveis ligadas não afetam o valor semântico da conclusão.
- (e) A restrição determina que x_0 deve ser substituída por um termo concreto t antes de se obter γ , de modo análogo à regra ($\forall_e$).

Gabarito

Alternativa correta: (c)

- (a) é incorreta: " x_0 variável nova" implica também que x_0 não ocorre em hipóteses não-descartadas ativas no momento da aplicação da regra. Caso contrário, a derivação de γ a partir de $\varphi(x_0)$ poderia depender implicitamente da identidade do testemunho por meio dessas hipóteses, comprometendo a validade da regra.
- (b) é incorreta: "variável nova" não é mera conveniência notacional. Ela impõe que x_0 seja genuinamente fresca — não utilizada em nenhum lugar ativo da derivação —, o que é essencial para garantir que o argumento seja independente do testemunho.
- (c) é correta: a restrição " x_0 não ocorre em γ " assegura que a conclusão γ não menciona o testemunho particular introduzido. Com isso, se $\exists_x \varphi(x)$ é verdadeiro para *algum* x , e de $\varphi(x_0)$ pode-se derivar γ sem que x_0 apareça em γ , então γ é verdadeiro independentemente de qual seja esse x .
- (d) é incorreta: a restrição exige que x_0 não ocorra em γ de nenhuma forma — nem livre nem ligada. Exigir apenas que x_0 apareça como variável ligada seria insuficiente para garantir a independência da conclusão em relação ao testemunho.
- (e) é incorreta: essa descrição corresponde à regra $(\forall_e)$ (eliminação do universal), que instancia $\forall_x \varphi(x)$ em um termo t . Na regra $(\exists_e)$, ao contrário, x_0 é uma variável auxiliar usada internamente na subderivação de γ e deve desaparecer na conclusão.

Exercício 2. Considere o conjunto das árvores binárias *btree* definido pela gramática

$$t ::= \bullet \mid \circ(t, t)$$

onde $\bullet$ representa uma folha e $\circ(t_1, t_2)$ um nó com duas subárvores. As funções *fol* (número de folhas) e *int* (número de nós internos) são definidas recursivamente por:

$$\begin{aligned} fol(t) &= \begin{cases} 1, & t = \bullet \\ fol(t_1) + fol(t_2), & t = \circ(t_1, t_2) \end{cases} \\ int(t) &= \begin{cases} 0, & t = \bullet \\ 1 + int(t_1) + int(t_2), & t = \circ(t_1, t_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Deseja-se provar por indução estrutural que $fol(t) = int(t) + 1$ para toda árvore $t \in btree$. Qual alternativa descreve corretamente a hipótese de indução utilizada no passo indutivo (caso $t = \circ(t_1, t_2)$)?

- Assume-se que $fol(t') = int(t') + 1$ para toda árvore binária t' com menos nós do que $t = \circ(t_1, t_2)$.
- Assume-se que $fol(t_1) = int(t_1) + 1$ e $fol(t_2) = int(t_2) + 1$, onde t_1 e t_2 são as subárvores imediatas de $t = \circ(t_1, t_2)$.

- (c) Assume-se que $fol(t_1) = int(t_1) + 1$ apenas para a subárvore esquerda t_1 ; a subárvore direita t_2 é tratada separadamente pelo caso base.
- (d) Não há hipótese de indução porque o passo indutivo segue diretamente das definições de fol e int por cálculo algébrico, sem precisar de resultado anterior.
- (e) Assume-se que $fol(t) = int(t) + 1$ vale para alguma árvore t' construída com exatamente uma aplicação a menos da regra recursiva do que $\circ(t_1, t_2)$.

Gabarito

Alternativa correta: (b)

- (a) é incorreta: a descrição corresponde à indução bem-fundada (ou indução forte) sobre o número de nós, não à indução estrutural. Na indução estrutural, a hipótese é assumida especificamente para os subtermos imediatos — t_1 e t_2 — que aparecem na regra recursiva que define $\circ(t_1, t_2)$, e não para todos os elementos estruturalmente menores.
- (b) é correta: o princípio de indução estrutural sobre $btree$ associa ao caso recursivo $\circ(t_1, t_2)$ exatamente duas hipóteses de indução, uma para cada subtermo direto. Formalmente, o princípio tem a forma
$$\frac{P(\bullet) \quad \forall t_1 t_2, P(t_1) \rightarrow P(t_2) \rightarrow P(\circ(t_1, t_2))}{\forall t, P(t)}$$
, de modo que no passo indutivo dispõe-se de $P(t_1)$ e $P(t_2)$ simultaneamente.
- (c) é incorreta: o princípio de indução estrutural fornece hipóteses para *ambas* as subárvores t_1 e t_2 . Tratar t_2 pelo caso base seria incorreto, pois t_2 é uma árvore arbitrária, não necessariamente uma folha.
- (d) é incorreta: sem a hipótese de indução não é possível concluir o passo indutivo. O cálculo $fol(\circ(t_1, t_2)) = fol(t_1) + fol(t_2)$ usa a definição, mas para igualar $fol(t_i)$ a $int(t_i) + 1$ é imprescindível a hipótese sobre t_1 e t_2 .
- (e) é incorreta: a noção de "uma aplicação a menos da regra recursiva" não tem sentido preciso em indução estrutural, pois uma árvore pode ter subcampos de profundidades distintas. O correto é falar nos subtermos imediatos que a regra construtora recebe como argumentos.

Exercício 3. Considere a prova por indução estrutural em l_1 do seguinte

$$\vdash \forall l_1 \forall l_2, |l_1 \circ l_2| = |l_1| + |l_2|$$

No passo indutivo (caso $l_1 = a :: l'_1$), a **hipótese de indução** (h.i.) é dada por

$$\forall l_2, |l'_1 \circ l_2| = |l'_1| + |l_2|$$

A derivação desse passo é dada pela seguinte árvore:

$$\begin{array}{c}
\frac{\forall l_2, |l'_1 \circ l_2| = |l'_1| + |l_2| \quad (h.i.)}{|l'_1 \circ l_2| = |l'_1| + |l_2|} \quad (\forall_e) \\
\frac{|l'_1 \circ l_2| = |l'_1| + |l_2|}{1 + |l'_1 \circ l_2| = 1 + |l'_1| + |l_2|} \quad (EQ. \text{ PROP.}) \\
\frac{1 + |l'_1 \circ l_2| = 1 + |l'_1| + |l_2|}{|a :: (l'_1 \circ l_2)| = |a :: l'_1| + |l_2|} \quad (DEF.) \\
\frac{|a :: (l'_1 \circ l_2)| = |a :: l'_1| + |l_2|}{|(a :: l'_1) \circ l_2| = |a :: l'_1| + |l_2|} \quad (DEF.) \\
\frac{|(a :: l'_1) \circ l_2| = |a :: l'_1| + |l_2|}{\forall l_2, |(a :: l'_1) \circ l_2| = |a :: l'_1| + |l_2|} \quad (\forall_i)
\end{array}$$

A regra de introdução da quantificação universal é dada por:

$$\frac{\varphi(x_0)}{\forall_x \varphi(x)} \quad (\forall_i) \quad \text{se a prova de } \varphi(x_0) \text{ não depende de hipótese não-descartada que contenha ocorrências livres de } x_0.$$

Considere o passo de aplicação da regra $(\forall_i)$ na derivação do passo indutivo acima. Marque a única alternativa correta:

- (a) É inválida pois, após aplicar $(\forall_e)$ à (h.i.), a variável l_2 passa a ocorrer livremente na fórmula $|l'_1 \circ l_2| = |l'_1| + |l_2|$, e a restrição de $(\forall_i)$ proíbe que a variável a ser generalizada ocorra livremente em qualquer fórmula presente na derivação.
- (b) É válida pois l_2 ocorre ligada na (h.i.), e a restrição de $(\forall_i)$ exige apenas ausência de ocorrências livres de l_2 em hipóteses não-descartadas, condição que é satisfeita.
- (c) É válida pois a utilização de $(\forall_e)$ na (h.i.) faz o descarte desta hipótese, e portanto, no momento em que $(\forall_i)$ é aplicada, não há hipótese não-descartada que contenha l_2 .
- (d) É inválida pois l_2 ocorre no escopo do quantificador $\forall l_2$ na (h.i.), o que caracteriza uma hipótese não-descartada que contém l_2 ; a restrição de $(\forall_i)$ proíbe qualquer ocorrência de l_2 em hipóteses não-descartadas, seja livre ou ligada.
- (e) É válida pois o princípio de indução estrutural garante que as variáveis introduzidas no passo indutivo são sempre frescas em relação a todo o contexto, dispensando a verificação individual da restrição de $(\forall_i)$.

Gabarito

Alternativa correta: (b)

- (a) é incorreta: a restrição de $(\forall_i)$ não diz respeito a *qualquer* fórmula da derivação, mas exclusivamente a hipóteses *não-descartadas*. A fórmula $|l'_1 \circ l_2| = |l'_1| + |l_2|$ obtida por $(\forall_e)$ é um resultado *derivado*, não uma hipótese assumida; portanto, a ocorrência livre de l_2 nela não bloqueia $(\forall_i)$.
- (b) é correta: a hipótese não-descartada ativa quando $(\forall_i)$ é aplicada é a própria (h.i.) $\forall l_2, |l'_1 \circ l_2| = |l'_1| + |l_2|$. Nessa fórmula, l_2 está no escopo do quantificador $\forall l_2$, ou seja, ocorre *ligada* e não livremente. Como a restrição

exige apenas ausência de ocorrências *livres* em hipóteses não-descartadas, a condição é satisfeita e $(\forall_i)$ é aplicável.

- (c) é incorreta: aplicar $(\forall_e)$ a uma hipótese *não a descarta*. A (h.i.) permanece entre as hipóteses ativas durante todo o passo indutivo; apenas a conclusão do passo indutivo (devolvida ao princípio de indução) é que encerra seu uso. No momento em que $(\forall_i)$ é aplicada, a (h.i.) ainda está presente — mas, como l_2 nela é ligada, isso não impede $(\forall_i)$.
- (d) é incorreta: a restrição de $(\forall_i)$ fala em hipóteses não-descartadas que "contenham x_0 *livremente*". Ocorrências *ligadas* de l_2 — como a que há em $\forall l_2$, $|l'_1 \circ l_2| = |l'_1| + |l_2|$ — não são abrangidas pela restrição. A distinção entre variável livre e variável ligada é, precisamente, o núcleo desta questão.
- (e) é incorreta: o princípio de indução estrutural não acarreta automaticamente a validade de $(\forall_i)$. A restrição deve ser verificada caso a caso: é perfeitamente possível construir um passo indutivo em que a variável a generalizar ocorra livremente em uma hipótese não-descartada, tornando $(\forall_i)$ inaplicável. A validade aqui decorre da estrutura específica da (h.i.), não de uma garantia geral do princípio de indução.