

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Ciência da Computação



UnB

Lógica Computacional 1 (2026/1)
Segunda Avaliação - Parte discursiva

15 de julho de 2026

Nome: _____

Matrícula: _____

Nome: _____

Matrícula: _____

• **Instruções:**

1. Esta avaliação pode ser feita individualmente ou em dupla.
2. Consulta a material próprio impresso é permitida;
(a) É **proibida** a consulta a qualquer meio eletrônico (celular, tablet, computador, etc).
3. Valor das questões:
 - Item 1: 1.0 ponto;
 - Item 2: 2.0 pontos;
 - Item 3: 2.0 pontos;
 - Item 4: 2.0 pontos.
4. Tempo de duração: 21h05–22h30.

Exercício 1. *Seja φ uma fórmula da lógica de predicados. Definimos a tradução negativa de Gödel-Gentzen de φ , denotada por φ^N , indutivamente por:*

$$\varphi^N = \begin{cases} \neg\neg\varphi & \text{se } \varphi \text{ é uma constante ou fórmula atômica} \\ \neg(\psi^N) & \text{se } \varphi = \neg\psi \\ \varphi_1^N \wedge \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ \neg(\neg(\varphi_1^N) \wedge \neg(\varphi_2^N)) & \text{se } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \\ \varphi_1^N \rightarrow \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \\ \forall_x(\psi^N) & \text{se } \varphi = \forall_x\psi \\ \neg(\forall_x\neg(\psi^N)) & \text{se } \varphi = \exists_x\psi \end{cases}$$

O fragmento negativo da LPO é definido pela gramática

$$\theta ::= \neg p(\vec{t}) \mid \perp \mid \neg\theta \mid \theta \wedge \theta \mid \theta \rightarrow \theta \mid \forall_x\theta.$$

Provaremos que $\theta^N \dashv\vdash_m \theta$, para qualquer fórmula θ pertencente ao **fragmento negativo**, por indução estrutural em θ . Em cada caso, provaremos **ambas as direções** de $\dashv\vdash_m$.

- **Caso** $\theta = \neg p(\vec{t})$: $\theta^N = (\neg p(\vec{t}))^N = \neg p(\vec{t})^N = \neg(\neg\neg p(\vec{t})) = \neg\neg\neg p(\vec{t})$.
 - $(\leftarrow)$: $\neg p(\vec{t}) \vdash_m \neg\neg\neg p(\vec{t})$ trivial já que a regra $(\neg\neg_i)$ é minimal. ✓
 - $(\rightarrow)$: $\neg\neg\neg p(\vec{t}) \vdash_m \neg p(\vec{t})$ trivial já que a eliminação da dupla negação de fórmulas negadas pode ser feita na lógica minimal. ✓
- **Caso** $\theta = \perp$: $\theta^N = \neg\neg\perp$.
 - $(\leftarrow)$: $\perp \vdash_m \neg\neg\perp$ por $(\neg\neg_i)$. ✓
 - $(\rightarrow)$: $\neg\neg\perp \vdash_m \perp$ pela derivação a seguir:

$$\frac{\neg\neg\perp \quad \frac{\frac{[\perp]^u}{\neg\perp} (\neg_i) u}{\perp} (\neg_e)}{\perp} (\neg_e)$$

- **Caso** $\theta = \neg\psi$ (ψ no fragmento negativo): Então $\theta^N = \neg(\psi^N)$, e temos $\psi^N \dashv\vdash_m \psi$ por (h.i.). Queremos mostrar que $\neg(\psi^N) \dashv\vdash_m \neg\psi$. A prova é dividida em 2 casos, e o primeiro deles é resolvido a seguir:

$$\frac{\frac{[\neg(\psi^N)] \quad \frac{[\psi]^u}{\psi^N} (h.i.)}{\perp} (\neg_e)}{\neg\psi} (\neg_i) u$$

- **Complete a prova dos outros casos:**

1. $\neg\psi \vdash_m \neg(\psi^N)$;
2. **conjunção**;
3. **implicação**;
4. **quantificação universal**.

Gabarito

1. $\neg\psi \vdash_m \neg(\psi^N)$:

$$\frac{\frac{[\neg\psi] \quad \frac{[\psi^N]^u}{\psi} (h.i.)}{\perp} (\neg_e)}{\neg(\psi^N)} (\neg_i) u$$

2. **Caso** $\theta = \theta_1 \wedge \theta_2$: $\theta^N = \theta_1^N \wedge \theta_2^N$. Pela h.i., $\theta_i^N \dashv\vdash_m \theta_i$ para $i = 1, 2$.

• $\theta_1^N \wedge \theta_2^N \vdash_m \theta_1 \wedge \theta_2$:

$$\frac{(h.i.) \quad \frac{\theta_1^N \wedge \theta_2^N}{\theta_1^N} (\wedge_i) \quad \frac{\theta_1^N \wedge \theta_2^N}{\theta_2^N} (\wedge_i)}{\theta_1 \wedge \theta_2} (h.i.)$$

• $\theta_1 \wedge \theta_2 \vdash_m \theta_1^N \wedge \theta_2^N$

$$\frac{(h.i.) \quad \frac{\theta_1 \wedge \theta_2}{\theta_1} (\wedge_i) \quad \frac{\theta_1 \wedge \theta_2}{\theta_2} (\wedge_i)}{\theta_1^N \wedge \theta_2^N} (h.i.)$$

3. **Caso** $\theta = \theta_1 \rightarrow \theta_2$: Queremos mostrar que $\theta^N \dashv\vdash_m \theta$, ou seja, $\theta_1^N \rightarrow \theta_2^N \dashv\vdash_m \theta_1 \rightarrow \theta_2$. Adicionalmente, temos por (h.i.) que $\theta_1^N \dashv\vdash_m \theta_1$ e $\theta_2^N \dashv\vdash_m \theta_2$. Portanto:

• $\theta_1^N \rightarrow \theta_2^N \vdash_m \theta_1 \rightarrow \theta_2$:

$$\frac{[\theta_1^N \rightarrow \theta_2^N] \quad \frac{[\theta_1]^u}{\theta_1^N} (h.i.)}{\theta_2^N} (h.i.)$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1 \rightarrow \theta_2} u$$

• $\theta_1 \rightarrow \theta_2 \vdash_m \theta_1^N \rightarrow \theta_2^N$:

$$\frac{[\theta_1 \rightarrow \theta_2] \quad \frac{[\theta_1^N]^u}{\theta_1} (h.i.)}{\theta_2} (h.i.)$$

$$\frac{\theta_2^N}{\theta_1^N \rightarrow \theta_2^N} u$$

4. **Caso $\theta = \forall_x \psi$:** Queremos mostrar que $\theta^N \dashv\vdash_m \theta$, ou seja, $\forall_x(\psi^N) \dashv\vdash_m \forall_x(\psi)$. Temos por (h.i.) que $\psi^N \dashv\vdash_m \psi$, e portanto:

- $\forall_x(\psi^N) \vdash_m \forall_x \psi$:

$$\frac{\frac{\frac{\forall_x(\psi^N)}{\psi^N[x/x_0]} (\forall_e)}{\psi[x/x_0]} (h.i.)}{\forall_x \psi} (\forall_i)$$

- $\forall_x \psi \vdash_m \forall_x(\psi^N)$:

$$\frac{\frac{\frac{\forall_x(\psi)}{\psi[x/x_0]} (\forall_e)}{\psi^N[x/x_0]} (h.i.)}{\forall_x \psi^N} (\forall_i)$$