Lógica Computacional 1

Indução

Flávio L. C. de Moura*

1 Indução

Indução é uma técnica de prova muito poderosa que desempenha um papel fundamental tanto em Matemática quanto em Computação. Estudaremos esta técnica partindo dos conjuntos definidos indutivamente, mas o leitor interessado em se aprofundar no tema pode consultar, por exemplo, os livros [1, 2]. Um conjunto, digamos, A, é *definido indutivamente* se seus elementos podem ser construídos a partir de um conjunto finito de regras de inferência da forma:

$$\frac{}{a \in A} \qquad\qquad \frac{a_1 \in A \qquad a_2 \in A \ldots\ a_n \in A}{a \in A}$$

A regra da esquerda é um axioma, e diz que a é um elemento do conjunto A, enquanto que na regra da direita temos que se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são elementos de A então a também é um elemento de A. Por exemplo, qualquer conjunto finito pode ser definido indutivamente com um axioma para cada elemento. De fato, o conjunto Sem dos dias da semana pode ser definido indutivamente via 7 axiomas:

$$\frac{}{\text{domingo} \in Sem}\ (\text{DOM}) \qquad \frac{}{\text{segunda-feira} \in Sem}\ (\text{SEG}) \qquad \frac{}{\text{terça-feira} \in Sem}\ (\text{TER})$$

$$\frac{}{\text{quarta-feira} \in Sem}\ (\text{QUA}) \qquad \frac{}{\text{quinta-feira} \in Sem}\ (\text{QUI}) \qquad \frac{}{\text{sexta-feira} \in Sem}\ (\text{SEX})$$

$$\frac{}{\text{sábado} \in Sem}\ (\text{SAB})$$

Alternativamente, podemos utilizar uma notação mais compacta definir o conjunto Sem: se d é uma variável que representa um elemento qualquer de Sem então a gramática a seguir é equivalente à definição via as 7 regras de inferência apresentadas acima:

$$d ::= \text{domingo} \mid \text{segunda-feira} \mid \text{terça-feira} \mid \text{quarta-feira} \mid \text{quinta-feira} \mid \text{sexta-feira} \mid \text{sábado}$$

O conjunto *bool*, muito popular em Ciência da Computação, possui apenas dois elementos:

*flaviomoura@unb.br

$$\frac{}{\text{true} \in \mathit{bool}}\ (\textsc{true}) \qquad \frac{}{\text{false} \in \mathit{bool}}\ (\textsc{false})$$

Alternativamente, se b denota um valor booleano, podemos descrever o conjunto *bool* pela gramática:

$$b ::= \text{true} \mid \text{false}$$

Mas conjuntos definidos indutivamente também podem ser infinitos. O exemplo mais conhecido provavelmente é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, que pode ser definido pelas regras de inferência a seguir:

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}} \qquad \frac{n \in \mathbb{N}}{S\ n \in \mathbb{N}}$$

Neste caso, a regra da esquerda é um axioma que diz que o 0 é um número natural, enquanto que a regra da direita diz que se n é um número natural então $S\ n$ (o sucessor de n) também é um número natural. A gramática equivalente a estas duas regras é dada por:

$$n ::= 0 \mid S\ n \tag{1}$$

Agora que sabemos o que são conjuntos definidos indutivamente podemos voltar ao tema da indução, que é uma técnica de prova que nos permite provar propriedades de conjuntos definidos indutivamente. Como provar que os elementos de um conjunto definido indutivamente, digamos A, satisfazem uma dada propriedade P? Se o conjunto A for finito então podemos testar individualmente se cada elemento satisfaz a propriedade P. Mesmo que A seja um conjunto grande, depois de uma quantidade finita de tempo teremos uma prova de que os elementos de A satisfazem a propriedade P. E se o conjunto A for infinito? A ideia é bastante intuitiva: suponha que os elementos deste conjunto possam ser colocados um após o outro como peças de um dominó, de tal forma que, se uma peça qualquer for derrubada então a peça que está logo em seguida também é derrubada. Então podemos concluir, que se a primeira peça for derrubada então **todas** as outras serão derrubadas. Ou seja, voltando ao contexto de propriedades de elementos de um conjunto, a ideia é provar que se um elemento arbitrário do conjunto satisfaz a propriedade então o próximo elemento também satisfaz a propriedade. Se esta prova puder ser feita juntamente com a prova de que o primeiro elemento do conjunto também satisfaz a propriedade então podemos concluir que todos os elementos do conjunto satisfazem a propriedade.

Vamos iniciar este estudo sobre indução no contexto dos números naturais, onde esta noção de ordem é bem clara: o primeiro elemento é o 0, em seguida vem o 1, depois o 2, etc. De uma forma geral, depois de um número natural k vem o natural $S\ k$, o sucessor de k que também escrevemos como $k + 1$. A indução no contexto dos números naturais é conhecida como *indução matemática*, e será explorada na próxima seção.

A gramática (1) possui dois construtores: 0 e S. O primeiro diz que 0 é um número natural, e o segundo diz que a partir de um natural já construído, digamos n, podemos construir um outro natural, a saber, $S\ n$, ou seja, o sucessor de n. Muito bem, agora considere uma propriedade qualquer dos números naturais. Por exemplo, a que diz que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2. Como podemos provar esta propriedade? Isto mesmo, por indução! O que diz mesmo o princípio de indução para os números naturais? Diz que se uma propriedade P vale para 0 (base da indução), e se, supondo que P vale para um natural arbitrário k (hipótese de indução), podemos provar que ela vale também para $S\ k$ (o sucessor de k)[1] (passo indutivo) então podemos concluir que P vale para todos

[1]Note que o sucessor de k pode ser escrito como $S\ k$ ou $k + 1$.

os números naturais. Esquematicamente, podemos apresentar este princípio, denominado *Princípio da Indução Matemática (PIM)*, como a seguir:

$$\dfrac{P\ 0 \qquad\qquad \forall k, P\ k \Longrightarrow P\ (S\ k)}{\forall n, P\ n}\ (PIM)$$

Exemplo 1.1. *Queremos provar que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2. Esta propriedade vale trivialmente para o 0 (a soma dos 0 primeiros números ímpares é igual a 0^2). Agora suponha que a soma dos k primeiros números ímpares seja igual a k^2 (hipótese de indução). O $(k+1)$-ésimo número ímpar é igual a $2.k+1$ (por que?), e portanto a soma dos $k+1$ primeiros números ímpares é $k^2+2.k+1=(k+1)^2$, como queríamos provar.*
Uma outra forma de resolver este problema em um contexto mais formal pode ser feita a partir de uma definição formal da soma dos n primeiros números ímpares por meio do somatório $\sum_{i=1}^{n}(2.i-1)$, que por definição é igual a 0, se $n=0$. Queremos provar que $\sum_{i=1}^{n}(2.i-1)=n^2$, para todo número natural n. Aplicando o princípio da indução, teremos 2 casos para analisar:

- *(**Base da indução**): A base da indução se dá quando $n=0$, e é trivial porque o lado esquerdo da igualdade é igual a 0 por definição.*
- *(**Passo indutivo**): O passo indutivo é a parte interessante de qualquer prova por indução. Neste caso específico, vamos assumir que a propriedade que queremos provar vale para um número natural arbitrário, digamos k, e provaremos que esta propriedade continua valendo para o natural $k+1$. Ou seja, assumimos que $\sum_{i=1}^{k}(2.i-1)=k^2$, e vamos provar que $\sum_{i=1}^{k+1}(2.i-1)=(k+1)^2$. Partindo do lado esquerdo desta igualdade, podemos decompor o somatório da seguinte forma $\sum_{i=1}^{k+1}(2.i-1)=\sum_{i=1}^{k}(2.i-1)+(2.k+1)$, e agora podemos utilizar a hipótese de indução (h.i.) para assim chegarmos ao lado direito da igualdade: $\sum_{i=1}^{k+1}(2.i-1)=\sum_{i=1}^{k}(2.i-1)+(2.k+1)\overset{h.i.}{=}k^2+(2.k+1)=(k+1)^2$.*

Por fim, apresentamos esta prova na forma de árvore:

$$\dfrac{\dfrac{0=0}{\displaystyle\sum_{i=1}^{0}(2.i-1)=0^2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(2.i-1)=k^2]^u}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(2.i-1)+(2.k+1)=(k+1)^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}(2.i-1)=(k+1)^2}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(2.i-1)=k^2\to\sum_{i=1}^{k+1}(2.i-1)=(k+1)^2}\ (\to_i)\ u}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2.i-1)=n^2}\ (\text{Ind. em } n)$$

Existem propriedades que valem apenas para um subconjunto próprio dos números naturais:
Por exemplo, $2^n<n!$ só vale para $n\geq 4$. Para este tipo de problema utilizamos uma generalização do PIM onde a base de indução não precisa ser o 0. Chamaremos esta variação de *Princípio da Indução Generalizado (PIG)*:

$$\frac{P\ m \qquad\qquad \forall k, P\ k \Longrightarrow P\ (S\ k)}{\forall n, n \geq m \Longrightarrow P\ n}\ (PIG)$$

Exemplo 1.2. *Prove que* $2^n < n!, \forall n \geq 4$.

1. *(Base de indução) A propriedade vale para* $n = 4$*, o que é trivial, e;*
2. *(Passo indutivo) Mostraremos que* $2^{(S\ k)} < (S\ k)!$ *assumindo que* $2^k < k!, \forall k \geq 4$*. De fato, temos que* $2^{(S\ k)} = 2.2^k \overset{(h.i)}{<} 2.k! \overset{(*)}{<} (S\ k).k! = (S\ k)!$*, onde a desigualdade (*) se justifica pelo fato de* k *ser maior ou igual a 4.*

Uma variação do PIM bastante útil é conhecida como *Princípio da Indução Forte (PIF)*:

$$\frac{\forall k, (\forall m, m < k \Longrightarrow P\ m) \Longrightarrow P\ k}{\forall n, P\ n}\ (PIF)$$

Exercício 1.3. *Prove que qualquer inteiro* $n \geq 2$ *é um número primo ou pode ser escrito como um produto de primos (não necessariamente distintos), i.e. na forma* $n = p_1.p_2.\cdots.p_r$*, onde os fatores* p_i $(1 \leq i \leq r)$ *são primos.*

Exercício 1.4. *Mostre que PIM e PIF são princípios equivalentes.*

Exercício 1.5. *Prove que a soma dos* n *primeiros números naturais é igual a* $\frac{n(n+1)}{2}$*. Ou seja, mostre que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercício 1.6. *Prove que a soma dos* n *primeiros quadrados é igual a* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*. Ou seja, mostre que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercício 1.7. *Prove que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n.(n+1).(n+2)}{3}$.

Exercício 1.8. *Prove que* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Exercício 1.9. *Prove que a soma dos n primeiros cubos é igual ao quadrado da soma de 1 até n, ou seja, que* $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Exercício 1.10. *Prove que* $2^n - 1$ *é múltiplo de 3, para todo número natural n par.*

Exercício 1.11. *Prove que* $3 \mid (2^{2n} - 1)$ *para todo* $n \geq 0$.

Exercício 1.12. *Prove que* $3^n \geq n^2 + 3$ *para todo* $n \geq 2$.

Exercício 1.13. *Prove que* $n^2 < 4^{n-1}$ *para todo* $n \geq 3$.

Exercício 1.14. *Prove que* $n! > 3^n$ *para todo* $n \geq 7$.

Exercício 1.15. *Prove que* $n! \leq n^n$ *para todo* $n \geq 1$.

1. Indução no assistente de provas Coq

   Nesta seção, veremos como construir provas utilizando a indução matemática no assistente de provas Coq (`https://coq.inria.fr`). Um conjunto indutivamente definido pode ser construído com a palavra reservada `Inductive`. Por exemplo, o conjunto finito *Sem* dos dias da semana apresentado na seção anterior pode ser definido como a seguir:

```
Inductive Sem :=
| domingo: Sem
| segunda_feira: Sem
| terca_feira: Sem
| quarta_feira: Sem
| quinta_feira: Sem
| sexta_feira: Sem
| sabado: Sem.
```

   O conjunto dos números naturais é uma construção nativa do Coq, *i.e.* ela está disponível uma vez que o sistema é iniciado, e pode ser vista a partir do comando `Print nat.`

```
Inductive nat : Set :=  O : nat | S : nat -> nat.
```

   Ou seja, o conjunto `nat` dos números naturais é definido indutivamente e possui 2 construtores: o `O` (zero), e `S` (sucessor). Claramente, esta definição corresponde à gramática (1). Toda definição indutiva possui um princípio indutivo associado, e que é automaticamente gerado pelo Coq. Por padrão, o nome do princípio indutivo associado a uma definição indutiva, digamos `mdef`, é `mdef_ind`. No caso de `nat` podemos acessar este princípio pelo comando `Print nat_ind`:

   $\mathrm{nat}_i nd = fun(P : nat- > Prop)(f : P0)(f0 : foralln : nat, Pn- > P(Sn)) => fixF(n : nat) : Pn := matchnasn0return(Pn0)with|0 => f|Sn0 => f0n0(Fn0)end : forallP : nat- > Prop, P0- > (foralln : nat, Pn- > P(Sn))- > foralln : nat, Pn$

   A parte que nos interessa desta saída está em azul. Como em *(PIM)*, a base de indução diz que `P O`, e o passo indutivo corresponde ao trecho `(forall n : nat, P n -> P (S n))`. A conclusão como esperado, diz que `forall n : nat, P n`.

   A seguir faremos a prova de que a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2. Inicialmente precisamos expressar a "soma dos n primeiros números ímpares" em Coq. Para isto, definiremos um somatório. Antes disto carregamos a biblioteca `Lia`, que vai nos ajudar com a simplificação de expressões aritméticas nos inteiros.

```
Require Import Lia.

Fixpoint msum (n:nat) :=
 match n with
 | 0 => 0
 |S k => (msum k) + (2*k+1)
 end.
```

   A palavra reservada `Fixpoint` é utilizada para definir funções recursivas. Note que $\sum_{i=1}^{n}(2.i - 1)$ corresponde a `msum n`. Podemos fazer alguns testes com esta definição:

```
Eval compute in (msum 1).
```

```
     = 1
   : nat
```

O valor retornado é 1 porque que é igual ao primeiro número ímpar.

```
Eval compute in (msum 2).
```

```
     = 4
   : nat
```

Aqui a resposta é igual a 4 porque corresponde à soma dos dois primeiros números ímpares, ou seja, 1+3.

```
Eval compute in (msum 3).
```

```
     = 9
   : nat
```

O valor retornado corresponde à soma dos 3 primeiros números ímpares: 1+3+5=9.

```
Eval compute in (msum 4).
```

```
     = 16
   : nat
```

Por fim, temos que a soma dos 4 primeiros números ímpares é 1+3+5+7=16.

De acordo com estes testes, nossa definição de somatório está funcionando corretamente, e portanto podemos escrever o lema que queremos provar, a saber, que a soma dos `n` primeiros números naturais é igual a `n*n`:

```
Lemma msum_square: forall n, msum n = n*n.
```

Faremos a mesma prova apresentada na árvore construída na seção anterior. Iniciamos a prova por indução em `n` com a tática (ou comando) `induction n`.

```
Lemma msum_square: forall n, msum n = n*n.
Proof.
 induction n.
```

```
2 goals (ID 11)

 ============================
 msum 0 = 0 * 0

goal 2 (ID 14) is:
msum (S n) = S n * S n
```

Temos 2 casos para analisar (`2 goals`): o primeiro corresponde a base da indução, e o segundo é o passo indutivo.

O primeiro caso é trivial, e a tática `reflexivity` é capaz de concluir que os lados esquerdo e direito da igualdade são iguais a 0, uma vez que `msum 0` é igual a 0.

No segundo caso, temos como hipótese de indução que a soma dos `k` primeiros números ímpares é igual a `k*k`, e precisamos provar que a soma dos `(S k)` primeiros números ímpares é igual a `(S k)*(S K)`:

```
1 goal (ID 14)

k : nat
IHk : msum k = k * k
============================
msum (S k) = S k * S k
```

Podemos, por exemplo, aplicar a tática `simpl` para simplificar a expressão `msum (S k)`, ou seja, para aplicarmos a definição de `msum`. Agora podemos substituir o lado esquerdo da hipótese de indução pelo lado direito via o comando `rewrite IHn`. A expressão resultante é uma igualdade envolvendo somas e multiplicações de números naturais:

```
1 goal (ID 24)

k : nat
IHk : msum k = k * k
============================
k * k + (k + (k + 0) + 1) = S (k + k * S k)
```

As simplificações algébricas necessárias para que possamos concluir que os lados esquerdo e direito da igualdade coincidem são feitas pela tática `lia`, e a prova completa, disponível no arquivo `pim.v`[2]
, tem a seguinte forma:

```
Lemma msum_square: forall n, msum n = n*n.
Proof.
 induction n.
 - reflexivity.
 - simpl. rewrite IHn. lia.
Qed.
```

Agora vamos estabelecer a equivalência entre PIM e o PIG:

Exercício 1.16. *Complete a prova a seguir:*

```
Lemma PIG: forall (P : nat -> Prop) (k : nat), P k ->
              (forall n, n >= k -> P n -> P (S n)) ->
                       forall n : nat, n >= k -> P n.
Proof.
 intros P k H1 IH n H2.
 assert (H := nat_ind (fun n => n >= k -> P n)).
 Admitted.
```

Observe que a prova do exercício anterior utiliza o PIM via o comando `nat_ind`, e portanto temos uma prova de PIG via PIM. No outro sentido, vamos enunciar PIM como um lema:

[2] `http://flaviomoura.info/files/lca/pim.v`. Os exercícios propostos na seção anterior também estão disponíveis neste arquivo.

Exercício 1.17. *Complete a prova a seguir:*

```
Lemma PIM : forall P: nat -> Prop,
  (P 0) ->
  (forall n, P n -> P (S n)) ->
  forall n, P n.
Proof.
 intros P H IH n.
 apply PIG with 0.
 Admitted.
```

2. Indução Estrutural

Nesta seção veremos que o princípio de indução matemática (PIM) visto anteriormente é um caso particular de um princípio geral que está associado a qualquer conjunto definido indutivamente. Vimos dois tipos de regras utilizadas na construção de um conjunto definido indutivamente:

(a) As regras não recursivas, ou seja, aquelas que definem diretamente um elemento do conjunto definido indutivamente;

(b) As regras recursivas, ou seja, aquelas que constroem novos elementos a partir de elementos já construídos.

Como veremos no próximo exemplo, estas regras podem fazer uso de elementos de outros conjuntos previamente definidos. Formalmente, se $A_1, A_2, \ldots$ são conjuntos então a estrutura geral das regras de um conjunto definido indutivamente B é como a seguir:

(a) Inicialmente temos as regras não recursivas que definem diretamente os elementos $b_1, \ldots, b_m$ de B:

$$\frac{a_1 \in A_1 \qquad a_2 \in A_2 \ldots\ a_{j_1} \in A_{j_1}}{b_1[a_1, \ldots, a_{j_1}] \in B} \qquad \ldots$$

$$\frac{a_1 \in A_1 \qquad a_2 \in A_2 \ldots\ a_{j_m} \in A_{j_m}}{b_m[x_1, \ldots, x_{j_m}] \in B}$$

(b) Em seguida, temos as regras recursivas que constroem novos elementos a partir de elementos já construídos:

$$\frac{a_1 \in A_1 \ldots\ a_{j'_1} \in A_{j'_1}\ d_1, \ldots, d_{k_1} \in B}{c_1[x_1, \ldots, x_{j'_1}, d_1, \ldots, d_{k_1}] \in B} \qquad \ldots$$

$$\frac{a_1 \in A_1 \ldots\ a_{j_n} \in A_{j_n}\ d_1, \ldots, d_{k_n} \in B}{c_n[a_1, \ldots, a_{j_n}, d_1, \ldots, d_{k_n}] \in B}$$

Qualquer elemento de um conjunto definido indutivamente pode ser construído após um número finito de aplicações das regras que o definem (e somente com estas regras). Os elementos $d_1, d_2, \ldots, d_{k_i}$ são ditos *estruturalmente menores* do que o elemento $c_i[a_1, \ldots, a_{j_i}, d_1, \ldots, d_{k_i}]$. Isto significa que os elementos $d_1, d_2, \ldots, d_{k_i}$ são subtermos próprios de $c_i[a_1, \ldots, a_{j_i}, d_1, \ldots, d_{k_i}]$.

Podemos associar um princípio de indução a qualquer conjunto definido indutivamente. No contexto genérico acima, teremos um caso base (base da indução) para cada regra não recursiva, e um passo indutivo para cada regra recursiva. O esquema simplificado (omitindo os parâmetros por falta de espaço) tem a seguinte forma:

$$\frac{\overbrace{P(b_1)\dots P(b_m)}^{\text{casos base}} \quad \overbrace{(\forall d_1 \dots d_{k_1}, P(d_1),\dots,P(d_{k_1}) \Rightarrow P(c_1))\dots(\forall d_1 \dots d_{k_1}, P(d_1),\dots,P(d_{k_n}) \Rightarrow P(c_n))}^{\text{casos indutivos}}}{\forall x \in B, P\ x}$$

Retornando ao caso do conjunto dos números naturais, temos um princípio indutivo com apenas um caso base e um caso indutivo:

$$\frac{P\ 0 \qquad \forall k, P\ k \Longrightarrow P\ (S\ k)}{\forall n, P\ n}$$

O conjunto dos booleanos possui um princípio indutivo com dois casos base, e nenhum caso indutivo:

$$\frac{P \text{ true} \qquad P \text{ false}}{\forall b, P\ b}$$

$$\varphi ::= p \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \tag{2}$$

A gramática 2 nos diz como as fórmulas da LP podem ser construídas. Observe, em particular, seus os construtores recursivos: por exemplo, a negação de uma fórmula é construída a partir de outra fórmula já construída; a conjunção, a disjunção e a implicação são construídas a partir de duas fórmulas previamente construídas. Podemos derivar o princípio de indução para o conjunto das fórmulas da LP de maneira análoga aos casos anteriores, ou seja, como um caso particular da generalização apresentada acima. Como temos dois construtores não recursivos (variáveis proposicionais e a constante $\bot$) e quatro construtores recursivos (negação, conjunção, disjunção e implicação), o princípio indutivo correspondente terá a seguinte forma, considerando uma propriedade Q qualquer das fórmulas da LP:

$$\frac{(Q\ p) \qquad (Q\ \bot) \qquad (\forall\varphi, Q\ \varphi \Longrightarrow Q\ (\neg\varphi)) \qquad (\forall\varphi_1, Q\ \varphi_1 \wedge \forall\varphi_2, Q\ \varphi_2 \Longrightarrow Q\ (\varphi_1 \star \varphi_2))}{\forall\varphi, Q\ \varphi}$$

onde $\star \in \{\wedge, \vee, \to\}$. Chamamos o princípio de indução construído a partir de uma gramática recursiva de *indução estrutural*. Note que, para cada um dos conectivos binários (conjunção, disjunção e implicação) temos duas hipóteses de indução.

No exemplo a seguir, vamos mostrar que a gramática acima possui redundâncias, isto é, que existem conectivos que podem ser escritos a partir de outros. A título de completude incluímos o enunciado de dois exercícios já resolvidos na Lógica Proposicional:

Exercício 1.18. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove $\varphi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.*

Exercício 1.19. *Sejam φ e ψ fórmulas da LP. Prove $\varphi \to \psi \dashv\vdash (\neg\varphi) \vee \psi$.*

Exemplo 1.20. *Prove, sem utilizar tabela de verdade, que para qualquer fórmula φ, existe uma fórmula φ' equivalente a φ construída apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e com os símbolos proposicionais que ocorrem em φ.*
Dizemos que duas fórmulas φ e ψ da LP são equivalentes se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Provaremos este exercício por indução estrutural, isto é, indução na estrutura de φ:

- *Se φ é uma variável proposicional ou a constante $\perp$ então tome $\varphi' = \varphi$.*
- *Se $\varphi = \neg\psi$ então, por hipótese de indução, existe uma fórmula ψ' equivalente a ψ construída apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em ψ. Neste caso, basta tomar $\varphi' = \neg\psi'$, e estamos prontos.*
- *Se $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Neste caso, basta tomar $\varphi' = \psi_1' \vee \psi_2'$ e estamos prontos.*
- *Se $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Pelo exercício 2 sabemos que $\psi_1 \wedge \psi_2 \dashv\vdash \neg(\neg\psi_1 \vee \neg\psi_2)$. Então basta tomar $\varphi' = \neg(\neg\psi_1' \vee \neg\psi_2')$, e estamos prontos.*
- *Por fim, se $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ então, por hipótese de indução, existem fórmulas $\psi_i'(i = 1, 2)$, equivalentes respectivamente a $\psi_i(i = 1, 2)$, e construídas apenas com os conectivos $\vee$ e $\neg$, e os símbolos proposicionais que ocorrem em $\psi_i(i = 1, 2)$. Pelo exercício 2 da lista sabemos que $\psi_1 \to \psi_2 \dashv\vdash (\neg\psi_1) \vee \psi_2$. Então basta tomar $\varphi' = (\neg\psi_1') \vee \psi_2'$ e estamos prontos.*

Agora é a sua vez! Resolva o exercícios a seguir:

Exercício 1.21. *Prove, sem utilizar tabela de verdade, que para qualquer fórmula φ, existe uma fórmula φ' equivalente a φ construída apenas com os conectivos $\to$ e $\neg$, e com os símbolos proposicionais que ocorrem em φ.*

Exercício 1.22. *Prove, sem utilizar tabela de verdade, que para qualquer fórmula φ, existe uma fórmula φ' equivalente a φ construída apenas com os conectivos $\wedge$ e $\neg$, e com os símbolos proposicionais que ocorrem em φ.*

Considere a gramática da LPO:

$$\varphi ::= p(t, \dots, t) \mid \perp \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid \exists_x\varphi \mid \forall_x\varphi$$

o princípio de indução correspondente é dado como a seguir:

$$\frac{(\forall t_1, \dots, t_n, Q\ p(t_1, \dots, t_n)) \qquad (Q\ \perp) \qquad (\forall\varphi, Q\ \varphi \Longrightarrow Q\ (\neg\varphi)) \qquad (*) \qquad (**)}{\forall\varphi, Q\ \varphi}$$

onde
$(*)$ é igual a $(\forall\varphi_1, Q\ \varphi_1 \wedge \forall\varphi_2, Q\ \varphi_2 \Longrightarrow Q\ (\varphi_1 \star \varphi_2))$, $\star \in \{\wedge, \vee, \to\}$;
$(**)$ é igual a $(\forall x, \varphi, Q\ \varphi(x) \Longrightarrow Q\ (R_x\varphi(x)))$, $R \in \{\exists, \forall\}$.

Exercício 1.23. *Seja φ uma fórmula da lógica de predicados. Definimos a tradução negativa de Gödel-Gentzen de φ, denotada por φ^N, indutivamente por:*

$$\varphi^N = \begin{cases} \neg\neg\varphi & \text{se } \varphi \text{ é uma fórmula atômica, ou a constante } \bot \\ \neg(\psi^N) & \text{se } \varphi = \neg\psi \\ \varphi_1^N \wedge \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \\ \neg(\neg(\varphi_1^N) \wedge \neg(\varphi_2^N)) & \text{se } \varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \\ \varphi_1^N \rightarrow \varphi_2^N & \text{se } \varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \\ \forall_x(\psi^N) & \text{se } \varphi = \forall_x\psi \\ \neg(\forall_x\neg(\psi^N)) & \text{se } \varphi = \exists_x\psi \end{cases}$$

Construa uma prova intuicionista para o sequente a seguir: $\neg\neg(\varphi^N) \vdash_i \varphi^N$

Exercício 1.24. *Uma fórmula da lógica de predicados ϕ pertence ao* fragmento negativo *se ϕ pode ser construída a partir da seguinte gramática, onde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(n > 0)$ são termos:*

$$\phi ::= \neg p(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mid \bot \mid (\neg\phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \rightarrow \phi) \mid (\forall_x \phi)$$

Prove na lógica minimal que $\neg\neg\theta \vdash_m \theta$ para qualquer fórmula θ pertencente ao fragmento negativo. Use indução na estrutura de θ.

Nos próximos capítulos estudaremos diversos algoritmos que utilizam a estrutura de lista encadeada, definida pela seguinte gramática $l ::= nil \mid a :: l$, onde nil representa a lista vazia, e $a :: l$ representa a lista com primeiro elemento a e cauda l. Como esta gramática possui um construtor não recursivo, e um construtor recursivo, teremos um princípio de indução com um caso base, e um passo indutivo:

$$\frac{P\ nil \qquad \forall l\ h, P\ l \Longrightarrow P\ (h :: l)}{\forall l, P\ l}$$

O comprimento de uma lista, isto é, o número de elementos que a lista possui, é definido recursivamente por:

$$|l| = \begin{cases} 0, & \text{se } l = nil \\ 1 + |l'|, & \text{se } l = a :: l' \end{cases}$$

Uma operação importante que nos permite construir uma nova lista a partir de duas listas já construídas é a concatenação. Podemos definir a concatenação de duas listas por meio da seguinte função recursiva:

$$l_1 \circ l_2 = \begin{cases} l_2, & \text{se } l_1 = nil \\ a :: (l' \circ l_2), & \text{se } l_1 = a :: l' \end{cases}$$

Por fim, o reverso de uma lista é definido recursivamente por:

$$rev(l) = \begin{cases} l, & \text{se } l = nil \\ (rev(l')) \circ (a :: nil), & \text{se } l = a :: l' \end{cases}$$

Os exercícios a seguir expressam diversas propriedades envolvendo estas operações. Resolva cada um deles utilizando indução.

Exercício 1.25. *Prove que $|l_1 \circ l_2| = |l_1| + |l_2|$, quaisquer que sejam as listas l_1, l_2.*

Exercício 1.26. *Prove que $l \circ nil = l$, qualquer que seja a lista l.*

Exercício 1.27. *Prove que a concatenação de listas é associativa, isto é,* $(l_1 \circ l_2) \circ l_3) = l_1 \circ (l_2 \circ l_3)$ *quaisquer que sejam as listas* l_1, l_2 *e* l_3*.*

Exercício 1.28. *Prove que* $|rev(l)| = |l|$*, qualquer que seja a lista* l*.*

Exercício 1.29. *Prove que* $rev(l_1 \circ l_2) = (rev(l_2)) \circ (rev(l_1))$*, quaisquer que sejam as listas* l_1, l_2*.*

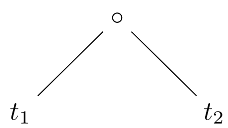
Exercício 1.30. *Prove que* $rev(rev(l)) = l$*, qualquer que seja a lista* l*.*

Outra estrutura de dados importante em Computação é a estrutura de árvores. O caso particular do conjunto *btree* das árvores binárias, isto é, as árvores cujos nós têm dois filhos, ou são folhas (não têm filhos) pode ser definido indutivamente pelas seguintes regras:

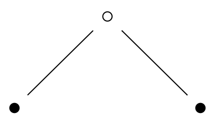
$$\frac{}{\bullet \in btree} \qquad\qquad \frac{t_1 \in btree \qquad t_2 \in btree}{\circ(t_1, t_2)}$$

A gramática correspondente é dada por $t ::= \bullet \mid \circ(t, t)$.

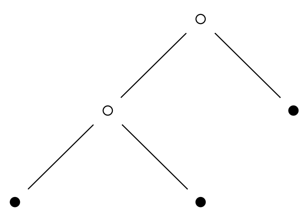
Assim, um nó sem filhos representa uma árvore (caso não recursivo), e t_1 e t_2 são duas árvores binárias então podemos construir uma nova árvore como na figura abaixo:



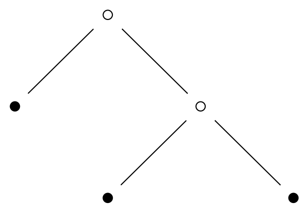
Observe que a árvore



é escrita como $\circ(\bullet, \bullet)$ na sintaxe da regra recursiva acima. Enquanto que



corresponde a $\circ(\circ(\bullet, \bullet), \bullet)$. Ou ainda,



corresponde a $\circ(\bullet, \circ(\bullet, \bullet))$.

O princípio de indução sobre *btree* terá um caso base, e um caso indutivo com duas hipóteses de indução. Nesta representação a raiz da árvore está no topo, e as folhas ficam para baixo (como ser a árvore estivesse de cabeça para baixo), mas veremos outras situações em que a raiz fica na parte inferior, e as folhas ficam no topo da árvore (como ocorre na natureza). As duas representações são utililizadas em Computação, como veremos.

Podemos definir a altura de uma árvore binária da seguinte forma:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = \bullet \\ 1 + \max(h(t_1), h(t_2)), & \text{se } t = \circ(t_1, t_2) \end{cases}$$

O número de nós de uma árvore binária é dado por:

$$n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = \bullet \\ 1 + n(t_1) + n(t_2)), & \text{se } t = \circ(t_1, t_2) \end{cases}$$

Exercício 1.31. *Mostre que $n(t) \leq 2^{h(t)+1} - 1$, para qualquer árvore binária t.*

Podemos flexibilizar um pouco a definição de árvore binária e permitir que um nó tenha, no máximo, dois filhos. Neste caso, acrescentaremos mais uma regra à nossa definição:

$$\frac{}{\bullet \in btree} \qquad \frac{t \in btree}{\circ(t)} \qquad \frac{t_1 \in btree \quad t_2 \in btree}{\circ(t_1, t_2)}$$

A gramática correspondente é dada por $t ::= \bullet \mid \circ(t) \mid \circ(t, t)$.

Podemos estender esta definição para árvores cujos nóes possuem até $k \geq 0$ filhos, mas na prática ficaremos restritos a $k = 3$ por conta da estrutura das regras do sistema de dedução natural tanto na lógica proposicional quanto na lógica de predicados. Como exemplo, provaremos o Teorema de Glivenko:

Exemplo 1.32. *O teorema de Glivenko diz que se $\Gamma \vdash_c \varphi$ então $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$ na lógica proposicional, ou seja, se φ tem uma prova clássica a partir de Γ, então $\neg\neg\varphi$ tem uma prova intuicionista a partir de Γ na lógica proposicional. Faremos a prova deste teorema por indução na derivação $\Gamma \vdash_c \varphi$, isto é, indução na estrutura da árvore correspondente à derivação clássica de φ a partir de Γ. Queremos provar $\Gamma \vdash_i \neg\neg\varphi$, quais quer que sejam Γ e φ.*

Referências

[1] H. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press, 1977.

[2] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.