Lógica Computacional 1

Lógica de Primeira Ordem

Flávio L. C. de Moura*

1 A Lógica de Primeira Ordem

Vamos estender a Lógica Proposicional para ganhar em poder de expressividade. Como é a gramática da Lógica de Primeira Ordem (LPO)? Isto é, qual a linguagem que precisamos para conseguir expressar quantificação universal e existencial? Inicialmente, precisamos representar os elementos que podem ser quantificados. Assim, diferentemente do caso proposicional, temos duas classes de objetos na LPO: *termos* e *fórmulas*. Os termos são representados pela seguinte gramática:

$$t ::= x \mid f(t, \ldots, t) \tag{1}$$

ou seja, os termos são construídos a partir de variáveis (no sentido usual da palavra em Matemática) e, funções com uma certa aridade (i.e número de argumentos). Observe que os termos vão representar os elementos do conjunto sobre o qual podemos quantificar e caracterizar por meio de propriedades. Por exemplo, considere o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Neste caso, as variáveis representam números naturais, e exemplos de funções são: sucessor (aridade 1), soma (aridade 2), etc. O conjunto das variáveis de um termo t, notação (t), consiste no conjunto das variáveis que ocorrem em t, e pode ser definido indutivamente por:

Definição 1.1. *O conjunto $var(t)$ das variáveis que ocorrem no termo t é definido indutivamente como a seguir:*

1. $var(x) = \{x\}$;
2. $var(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = var(t_1) \cup var(t_2) \cup \ldots \cup var(t_n)$.

Denotaremos por $t[[x/u]]$ o termo obtido ao se substituir todas as ocorrências da variável x pelo termo u no termo t.

As fórmulas da LPO utilizam os mesmos conectivos da LP e são definidas pela seguinte gramática:

$$\varphi ::= p(t, \ldots, t) \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid \exists_x \varphi \mid \forall_x \varphi \tag{2}$$

onde o primeiro construtor representa uma fórmula atômica, e os dois últimos representam, respectivamente, a quantificação existencial e universal. Note que as fórmulas atômicas representam fórmulas que não podem ser decompostas, e que têm termos como argumentos. Em uma fórmula atômica da forma $p(t_1, \ldots, t_n)$, p é um *predicado* de aridade n, e $t_1, \ldots, t_n$ são termos. A LPO é a lógica utilizada no dia a dia dos matemáticos, ainda que de maneira informal. Com os predicados podemos expressar propriedades dos termos. Por exemplo, ainda no conjunto dos números naturais, podemos expressar a propriedade de um número natural ser primo por meio de um predicado unário, digamos p. Desta forma, a fórmula $p(x)$ pode expressar o fato de x ser primo. Outros exemplos de fórmulas atômicas incluem os predicados $\leq$, $\geq$, $<$ e $>$ que normalmente usamos em notação infixa como em $2 \leq 5$, por exemplo.

Observe que agora existem dois tipos de variáveis na linguagem da Lógica de Primeira Ordem. Por exemplo, considere as fórmulas $q(x)$ e $\forall_x p(x)$. Em $\forall_x p(x)$ ocorrência da variável x em $p(x)$ está

*flaviomoura@unb.br

ligada ao quantificador universal, enquanto que na fórmula $q(x)$, a variável x está **livre**. De uma forma geral, dizemos que uma ocorrência de uma variável é ligada, se ela estiver no escopo de um quantificador (universal ou existencial), e livre, se a ocorrência não estiver no escopo de nenhum quantificador. Observe que uma variável pode ocorrer livre e ligada em uma mesma fórmula: $q(x) \vee \forall_x p(x)$. O conjunto das variáveis livres de uma fórmula φ, notação $FV(\varphi)$, é definido indutivamente como segue:

Definição 1.2. *Seja φ uma fórmula da LPO. O conjunto $FV(\varphi)$ das variáveis livres da fórmula φ é definido indutivamente na estrutura de φ por:*

1. $FV(p(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = var(t_1) \cup var(t_2) \cup \ldots \cup var(t_n)$;
2. $FV(\bot) = \{\}$;
3. $FV(\neg\psi) = FV(\psi)$;
4. $FV(\psi \star \gamma) = FV(\psi) \cup FV(\gamma)$, *onde* $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
5. $FV(Q_x\psi) = FV(\psi) \backslash \{x\}$, *onde* $Q \in \{\forall, \exists\}$.

De maneira análoga podemos definir o conjunto das variáveis ligadas de uma fórmula:

Definição 1.3. *Seja φ uma fórmula da LPO. O conjunto $BV(\varphi)$ das variáveis ligadas da fórmula φ é definido indutivamente na estrutura de φ por:*

1. $BV(p(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \{\}$;
2. $BV(\bot) = \{\}$;
3. $BV(\neg\psi) = BV(\psi)$;
4. $BV(\psi \star \gamma) = BV(\psi) \cup BV(\gamma)$, *onde* $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;
5. $BV(Q_x\psi) = BV(\psi) \cup \{x\}$, *onde* $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Estas noções são importantes porque a operação de substituição na Lógica de Primeira Ordem é definida de tal forma a evitar captura de variáveis, diferentemente da substituição feita em termos vista anteriormente. Isto significa que, por exemplo, se quisermos substituir a ocorrência de y em $\forall_x p(x, y)$ por x, o resultado não pode ser $\forall_x p(x, x)$ já que neste caso a segunda ocorrência de x que era livre, passou a ser ligada depois da substituição, ou seja, a segunda ocorrência de x foi capturada. Para evitar este problema, podemos renomear as variáveis ligadas de uma fórmula sempre que necessário. De fato, observe que as fórmulas $\forall_x q(x)$, $\forall_y q(y)$ e $\forall_z q(z)$ têm todas a mesma semântica. Isto significa que o renomeamento de variáveis ligadas não muda o sentido, ou significado, de uma fórmula. Para enfatizarmos a operação de substituição que definiremos a seguir, denotaremos por $\varphi[x/t]$ o resultado de substituir todas as ocorrências livres de x na fórmula φ pelo termo t. Quando a variável a ser substituída não precisar ser enfatizada (por exemplo, por poder ser facilmente obtida do contexto), escreveremos simplesmente $\varphi(t)$ ao invés de $\varphi[x/t]$.

Definição 1.4. *Seja* φ *uma fórmula da LPO. A operação de substituir todas as ocorrências livres da variável* x *pelo termo* t *em* φ*, notação* $\varphi[x/t]$ *é definida indutivamente na estrutura da fórmula* φ *da seguinte forma:*

1. $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)[x/t] = p(t_1[[x/t]], t_2[[x/t]], \ldots, t_n[[x/t]])$*;*

2. $\perp[x/t] = \perp$*;*

3. $(\neg\psi)[x/t] = \neg(\psi[x/t])$*;*

4. $(\psi \star \gamma)[x/t] = (\psi[x/t]) \star (\gamma[x/t])$*, onde* $\star \in \{\vee, \wedge, \to\}$*;*

5. $(Q_y\psi)[x/t] = \begin{cases} Q_y\psi, & \textit{se } x = y; \\ Q_y(\psi[x/t]), & \textit{se } y \notin \mathit{var}(t); \\ Q_z(\psi[y/z][x/t]), & \textit{c.c.} \end{cases}$
   onde z *é uma variável nova, e* $Q \in \{\forall, \exists\}$*.*

Observe que o primeiro caso do item 5 da definição anterior, a substituição não tem nenhum efeito sobre a fórmula quando a variável da substituição coincide com a variável do quantificador $(x = y)$, e portanto variáveis ligadas não são substituídas. O caso em que $y \notin \mathit{var}(t)$ faz a propagação da substituição para dentro do corpo do quantificador já que não há possibilidade de captura de variável. Por fim, quando $x \neq y$ e $y \in \mathit{var}(t)$ a variável do quantificador é renomeada para um nome novo, no caso z, as ocorrências de y em ψ são renomeadas para z e então a substituição é propagada para dentro do corpo do quantificador.

O sistema de dedução natural na LPO possui as mesmas regras utilizadas no caso proposicional, mas agora aplicadas a fórmulas da LPO, e adicionalmente temos as regras de introdução e eliminação para os quantificadores que apresentamos a seguir.

A regra de introdução do quantificador universal permite a construção de uma prova de uma fórmula da forma $\forall_x\varphi(x)$, ou seja, queremos concluir que a propriedade φ é satisfeita por qualquer elemento x do domínio. Mas o que precisamos para garantir que todo elemento x do domínio tenha a propriedade φ? Uma maneira seria tentar a construção individual de cada uma destas provas, ou seja, suponha que o domínio seja o conjunto $\{x_0, x_1, x_2 \ldots\}$ que pode ser finito ou infinito, e considere uma prova de $\varphi(x_0)$, isto é, uma prova de que x_0 satisfaz a propriedade φ. Seria possível repetir esta prova para x_1, x_2, e assim sucessivamente? Se pudermos repetir a mesma prova para todos os elementos do domínio então certamente podemos concluir $\forall_x\varphi(x)$. Para que uma generalização desta forma seja possível precisamos que a prova de $\varphi(x_0)$ não dependa de hipótese que assuma alguma informação sobre x_0.

$$\frac{\varphi(x_0)}{\forall_x\varphi(x)}\ (\forall_i) \quad \text{se a prova de } \varphi(x_0) \text{ não depende de hipótese não-descartada que contenha } x_0.$$

A regra de eliminação do quantificador universal nos permite instanciar a variável quantificada universalmente x com qualquer elemento t do domínio.

$$\frac{\forall_x\varphi(x)}{\varphi(t)}\ (\forall_e)$$

A analogamente, a regra de introdução do quantificador existencial nos permite concluir que existe um elemento que satisfaz a propriedade φ a partir da prova de que algum elemento do domínio, digamos t, satisfaça a propriedade φ.

$$\frac{\varphi(t)}{\exists_x \varphi(x)}\ (\exists_i)$$

Por fim, a regra de eliminação do quantificador existencial é dada como a seguir:

$$\frac{\exists_x \varphi(x) \qquad \begin{array}{c}[\varphi(x_0)]^u \\ \vdots \\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ (\exists_e)\ u$$

onde x_0 é uma variável nova que não ocorre em γ.

Nesta regra provamos γ a partir de uma prova de $\exists_x \varphi(x)$, e de uma prova de γ a partir da suposição $\varphi(x_0)$. Ou seja, como temos uma prova de $\exists_x \varphi(x)$, então temporariamente assumimos que x_0 (um novo elemento que, portanto, não pode ter sido utilizado antes) satisfaz a propriedade φ. Se a partir desta suposição pudermos provar uma fórmula, digamos γ, que não dependa de x_0 então podemos concluir γ após descartar a suposição $\varphi(x_0)$.

Exercício 1.5. *Apresente derivações em Dedução Natural para os sequentes $\forall_x \neg\varphi \dashv\vdash \neg\exists_x \varphi$ na LPO minimal.*

Exercício 1.6. *Apresente derivações em Dedução Natural para os sequentes $\neg\forall x\, \phi \dashv\vdash \exists x\, \neg\phi$, e em seguida classifique cada prova como minimal, intuicionista ou clássica.*

Exercício 1.7. *Apresente derivações em Dedução Natural para os sequentes $\forall x\, \phi \dashv\vdash \neg\exists x\, \neg\phi$, e em seguida classifique cada prova como minimal, intuicionista ou clássica.*

Exercício 1.8. *Apresente derivações em Dedução Natural para os sequentes $\exists x\, \phi \dashv\vdash \neg\forall x\, \neg\phi$, e em seguida classifique cada prova como minimal, intuicionista ou clássica.*

Exercício 1.9. *Apresente derivações em Dedução Natural para os sequentes a seguir assumindo que x não ocorre livre em ψ, e em seguida classifique cada prova como minimal, intuicionista ou clássica.*

1. $(\forall x\, \phi) \land \psi \vdash \forall x\, (\phi \land \psi)$
2. $(\exists x\, \phi) \land \psi \vdash \exists x\, (\phi \land \psi)$
3. $\forall x\, (\psi \to \phi) \vdash \psi \to \forall x\, \phi$
4. $\forall x\, (\phi \to \psi) \vdash (\exists x\, \phi) \to \psi$

Exercício 1.10. *Prove que não existe uma derivação intuicionista para os sequentes a seguir:*

1. $\neg\exists_x \neg\varphi \vdash \forall_x \varphi$
2. $\neg\forall_x \neg\varphi \vdash \exists_x \varphi$
3. $\forall_x \neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\forall_x \varphi$

Assim como a LP, a LPO é correta e completa, mas estes resultados não serão provados aqui (Veja, por exemplo, [1]).

Referências

[1] M. Ayala-Rincón and F. L. C. de Moura. *Applied Logic for Computer Scientists - Computational Deduction and Formal Proofs*. UTCS. Springer, 2017.