Projeto e Análise de Algoritmos

Flávio L. C. de Moura*

1 Algoritmos Gulosos

Nesta seção veremos outra técnica para resolver problemas de otimização. Esta técnica é utilizada para construir os chamados *algoritmos gulosos*, que a cada passo faz a escolha local ótima na esperança de obter uma solução ótima global.

Vamos iniciar com um exemplo antes de apresentarmos a técnica propriamente dita. Consideraremos o problema da alocação de atividades: Dado um conjunto finito de atividades $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tais que cada atividade a_i possui um horário de início s_i, e outro de término t_i, onde $0 \leq s_i < t_i < \infty$ $(1 \leq i \leq n)$, queremos selecionar o número máximo de atividades mutuamente compatíveis de S. Se selecionada, a atividade a_i utiliza o recurso no intervalo $[s_i, t_i)$. Duas atividades distintas a_i e a_j são ditas *compatíveis* se $s_i \geq t_j$ ou $s_j \geq t_i$. Assumiremos que as atividades estão ordenadas de forma monotonicamente crescente pelo horário de término: $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$. Por exemplo,

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
t_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

Exemplos de subconjuntos de atividades mutuamente compatíveis são $\{a_3, a_9, a_{11}\}$, $\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$ e $\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$.

Como no caso de programação dinâmica, precisamos que os problemas tenham a propriedade da subestrutura ótima porque utilizaremos as soluções ótimas dos subproblemas para construir uma solução ótima do problema original. Para mostrarmos que o problema da alocação de tarefas satisfaz a propriedade da subsestrutura ótima, denotaremos por S_{ij} o subconjunto de S contendo as atividades que iniciam após o final da atividade a_i, e terminam antes do início da atividade a_j. Queremos encontrar o conjunto máximo de atividades compatíveis de S_{ij}, que denotaremos por A_{ij}. Se A_{ij} possui a atividade a_k então temos 2 subproblemas: encontrar o subconjunto máximo A_{ik} de S_{ik}, e o subconjunto máximo A_{kj} de S_{kj}.

Afirmação: Uma solução ótima A_{ij} contém necessariamente soluções ótimas para os subproblemas S_{ik} e S_{kj}.

Prova. De fato, se existisse um subconjunto A'_{kj} com atividades mutuamente compatíveis de S_{kj} com $|A'_{kj}| > |A_{kj}|$ então poderíamos usar A'_{kj} no lugar de A_{kj} e teríamos $|A_{ik}|+|A'_{kj}|+1 > |A_{ik}|+|A_{kj}|+1 = |A_{ij}|$ o que contradiz a suposição de que A_{ij} é uma solução ótima. Um argumento análogo pode ser utilizado para A_{ik}. □

Dado o fato de que o problema possui a propriedade da subestrutura ótima sugere que o mesmo possa ser resolvido utilizando programação dinâmica. Denotando $c[i, j]$ o tamanho de uma solução ótima para S_{ij} nos dá a recorrência

$$c[i,j] = \begin{cases} 0, & \text{se } S_{ij} = \emptyset \\ \max\limits_{a_k \in S_{ij}} \{c[i,k] + c[k,j] + 1\}, & \text{se } S_{ij} \neq \emptyset \end{cases} \quad (1)$$

e procedemos como usual para construirmos uma solução via programação dinâmica. Mas e se pudéssemos escolher uma atividade sem ter que resolver todos os subproblemas?

*flaviomoura@unb.br

Isto é o que faz a estratégia gulosa ao selecionar a melhor solução local. Neste caso, a melhor solução local seria selecionar a atividade que usa o recurso de forma mínima, ou seja, selecionar a atividade que termina primeiro. Considerando que as atividades estão ordenadas crescentemente de acordo com o horário de término, a escolha gulosa seria a_1.

Note que ao fazermos uma escolha gulosa passamos a ter apenas um subproblema para resolver. Denotaremos por $S_k = \{a_i \in S \mid s_i \geq t_k\}$ o conjunto das atividades que iniciam depois do término da atividade a_k. Assim, fazendo a escolha gulosa a_1 teremos apenas o subproblema S_1 para ser resolvido. A ideia então é construir uma solução ótima para S_1 e utilizá-la na construção da solução ótima do problema original. A questão que surge é: Esta ideia funciona? Ela está correta?

Teorema 1.1. *Considere um subproblema não vazio S_k, e seja $a_m \in S_k$ com o menor tempo de finalização. Então a_m está incluída em algum subconjunto maximal de atividades mutuamente compatíveis de S_k.*

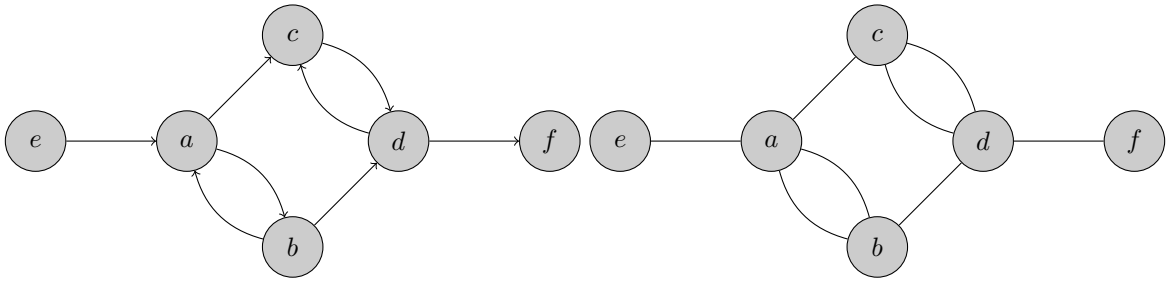
Prova. Seja A_k um subconjunto maximal de atividades mutuamente compatíveis de S_k, e seja a_j a atividade em A_k que termina primeiro, ou seja, a_j é tal que t_j é o menor valor de término em A_k. Se $a_j = a_m$ então estamos prontos. Se $a_j \neq a_m$ então seja $A'_k = A_k - \{a_j\} \cup \{a_m\}$. As atividades em A'_k são disjuntas já que as atividades em A_k, a_j é a atividade que termina primeiro em A_k e $t_m \leq t_j$. Como $|A'_k| = |A_k|$, concluímos que A'_k é um subconjunto maximal de atividades mutuamente compatíveis de S_k e contém a_m. □

Algumas considerações:

1. A estratégia gulosa nem sempre produz uma solução ótima;
2. Para aplicar a estratégia gulosa devemos observar 2 pontos:
   (a) O subproblema deve possuir a propriedade da subsestrutura ótima, e;
   (b) O subproblema deve possui a propriedade da escolha gulosa: uma solução ótima global pode ser obtida a partir de escolhas gulosas ótimas locais.
3. Enquanto programação dinâmica é naturalmente *bottom-up*, os algoritmos gulosos são naturalmente *top-down*.

1.1 Algoritmos em grafos

um grafo G é um par (V, E), onde V é o conjunto de vértices, e E é o conjunto de arestas. Quando as arestas do grafo são dirigidas, falamos em digrafo. A seguir, apresentamos um exemplo de um digrafo à esquerda, e um grafo à direita:



Do ponto de vista formal, temos as seguintes definições:

Definição 1.2. *Um* grafo *(não dirigido) G é um par (V, E) onde V é um conjunto finito não-vazio, e E é um conjunto de pares não-ordenados de elementos de V. Em grafos não-dirigidos arestas de um vértice para ele mesmo (*auto-loop*) são proibidas, e portanto toda aresta liga dois vértices distintos.*

Definição 1.3. *Um* digrafo *(ou um grafo dirigido) G é um par (V, E) onde V é um conjunto finito não-vazio, e E é uma relação binária sobre V. Em digrafos* auto-loops *são permitidos.*

Dado um grafo $G = (V, E)$, a versão dirigida de G é o digrafo $G' = (V, E')$ onde $(u, v) \in E'$ se, e somente se $(u, v) \in E$, isto é, substituímos cada aresta $(u, v) \in E$ pelas duas arestas dirigidas (u, v) e (v, u) na versão dirigida.

Dado um digrafo $G = (V, E)$, a versão não-dirigida (ou o *grafo associado*) de G é o digrafo $G' = (V, E')$ onde $(u, v) \in E'$ se, e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in E$, ou seja, a versão não-dirigida de um grafo é construída removendo a direção das arestas e os auto-loops.

1.1.1 Representação de grafos

Existem duas formas bastante comuns para representar um (di)grafo $G = (V, E)$: matriz de adjacências ou listas de adjacências. As duas representações se aplicam a grafos e a digrafos.

Definição 1.4. *A representação de um grafo $G = (V, E)$ por* listas de adjacências *consiste de um vetor Adj de $|V|$ listas, uma para cada vértice em V. Para cada $u \in V$, a lista de adjacências $Adj[u]$ contém todos os vértices v tais que $(u, v) \in E$, ou seja, contém todos os vértices adjacentes a u em G. Escreveremos $G.Adj[u]$ para se referir a lista $Adj[u]$ de G.*

Se G é um digrafo então a soma dos comprimentos de todas as listas de adjacências é igual a $|E|$, já que uma aresta (u, v) é representada por uma ocorrência de v em $Adj[u]$. Se G for um grafo (não-dirigido) então a soma dos comprimentos de todas as listas de adjacências é igual a $2|E|$ pois uma aresta (u, v) é representada pela ocorrência de v em $Adj[u]$, e pela ocorrência de u em $Adj[v]$. Em ambos os casos, a representação por listas de adjacências utiliza espaço da ordem de $\Theta(V + E)$. Esta representação não é adequada para grafos densos, mas é adequada para grafos esparcos, isto é, grafos com "poucas" arestas.

Uma desvantagem das listas de adjacências é que elas não fornecem uma forma rápida de determinar se a aresta (u, v) está ou não no (di)grafo. Para isto precisamos procurar por v em $Adj[u]$. A representação por matrizes de adjacências contorna este problema a um custo assintoticamente maior de espaço.

Definição 1.5. *A representação de um grafo $G = (V, E)$ por* matrizes de adjacências *assume uma enumeração (qualquer) $1, 2, \ldots, |V|$ dos vértices de G, e consiste de uma matriz $A = (a_{ij})$ de dimensão $|V| \times |V|$ tal que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \in E \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2}$$

A representação por matrizes de adjacências requer espaço da ordem de $\Theta(V^2)$, independentemente do número de arestas do grafo. Esta representação não é adequada para grafos esparços, mas é adequada para grafos densos ($E = \Theta(V^2)$).

Diversas definições coincidem para grafos e digrafos, mas algumas diferenças podem ocorrer dependendo do contexto. Por exemplo, se (u, v) é uma aresta de um digrafo $G = (V, E)$ então dizemos que (u, v) sai de u, e entra (ou incide) em v. Já quando (u, v) é uma aresta de um grafo, dizemos que (u, v) incide em u e v.

Definição 1.6. *O* grau *de um vértice em um grafo é o número de arestas que incidem sobre ele. Um vértice de grau 0 é dito* isolado. *Em um digrafo, o* grau de saída *(resp.* grau de entrada*) de um vértice é o número de arestas que saem (resp. chegam) neste vérice. O* grau *de um vértice em um digrafo é a soma dos seus graus de saída e entrada.*

Se (u, v) é uma aresta do (di)grafo $G = (V, E)$ então dizemos que v é adjacente a u. Note que a relação de adjacência é simétrica em grafos, mas não em digrafos. De fato, se um digrafo $G = (V, E)$ possui a aresta (u, v), mas não possui a aresta (v, u) então v é adjacente a u, mas u não é adjacente a v.

Um grafo (não-dirigido) é dito *completo* se qualquer par de vértices é adjacente.

Definição 1.7. *Um* caminho *de comprimento k de um vértice u para um vértice v em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ de vértices tal que $v_0 = u$ e $v_k = v$, e $(v_{i-1}, v_i) \in E$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. O comprimento de um caminho é o número de arestas deste caminho. Existe sempre um caminho de comprimento 0 de u para u, qualquer que seja o vértice u. Um* subcaminho *de um caminho $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ é uma sequência contígua dos vértices de p, isto é, quaisquer que sejam $0 \leq i \leq j \leq k$, a subsequência de vértices $\langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ é um subcaminho de p.*

Quando existe um caminho p de u para v, dizemos que v é alcançável a partir de u, o que normalmente é denotado por $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$, quando o grafo é dirigido.

Definição 1.8. *Um caminho é dito* simples *se todos os vértices no caminho são distintos.*

A definição de ciclos em grafos requer cuidado porque difere para grafos e digrafos. Em um digrafo, um *ciclo* é um caminho não-nulo, ou seja, de comprimento estritamente maior do que 0, tal que o primeiro e o último vértices são idênticos. Em um digrafo, um caminho $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ forma um *ciclo* se $v_0 = v_k$, e este caminho possui pelo menos uma aresta. Dois caminhos $\langle v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_0 \rangle$ e $\langle v'_0, v'_1, \ldots, v'_{k-1}, v'_0 \rangle$ formam o mesmo ciclo se existir j tal que $v'_i = v_{(i+j) \mod k}$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Um auto-loop é um ciclo de comprimento 1, e um digrafo sem auto-loops é dito *simples*. Em um grafo, as definições são similares, mas existe um requerimento adicional de que se qualquer aresta aparece mais de uma vez, então ela aparece com a mesma orientação: em um caminho $\langle v_0, v_1, \ldots v_{k-1}, v_k \rangle$, se $v_i = x$ e $v_{i+1} = y$ para $0 \leq i < k$, então não pode existir j tal que $v_j = y$ e $v_{j+1} = x$. Um ciclo é dito *simples* se seus vértices são distintos. Um (di)grafo sem ciclos é dito *acíclico*.

Um grafo acíclico é chamado de *floresta* (não-dirigida), e se o grafo for conexo então é chamado de *árvore* (livre ou não-dirigida). Um digrafo acíclico é normalmente abreviado por DAG. Nenhuma condição de conectividade é assumida em DAGs.

Definição 1.9. *Um* caminho eulerianos *em um (di)grafo conexo G é um caminho que percorre cada aresta apenas uma vez, mas vértices podem ser visitados mais de uma vez. Um* caminho hamiltoniano *em um (di)grafo G é um caminho simples que contém cada vértice de G. Um* ciclo hamiltoniano *em um (di)grafo G é um ciclo simples que contém cada vértice de G.*

Note que em um ciclo hamiltoniano cada vértice do (di)grafo é visitado um única vez. Em um grafo (não dirigido) um caminho $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ forma um ciclo se $k \geq 3$ e $v_0 = v_k$.

A definição de *conectividade* exige mais cuidado porque difere entre grafos e digrafos:

- Um grafo é dito *conexo* se para cada par de vértices v e w, existe um caminho entre v e w, ou seja, se qualquer vértice é alcançável a partir de todos os outros. As *componentes conexas* de um grafo são as classes de equivalência dos vértices sob a relação "é alcançável a partir de". Assim, um grafo é conexo se possui apenas uma componente conexa.

- A conectividade em digrafos é dividida em dois casos:

  - Um digrafo é *fortemente conexo* se o vértice u é alcançável a partir do vértice v, e vice-versa, quaisquer que sejam $u, v \in V$. As componentes fortemente conexas de um digrafo são as classes de equivalência dos vértices sob a relação "são mutuamente alcançáceis". Um digrafo é fortemente conexo se possui apenas uma componente fortemente conexa.
  - Um digrafo é *fracamente conexo* se o grafo associado é conexo, mas não é fortemente conexo.

Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são *isomorfos* se existir uma bijeção $f : V \to V'$ tal que $(u, v) \in E$ se, e somente se $(f(u), f(v)) \in E'$. Isto significa que podemos renomear os vértices de G como sendo os de G' mantendo as arestas correspondentes em G e G'. Dizemos que $G' = (V', E')$ é um *subgrafo* de $G = (V, E)$, notação $H \subseteq G$, se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Alguns subgrafos especiais:

- Um subgrafo H de um grafo G é dito *gerador* (*spanning*) se contém todos os vértices de G, isto é, se $H.V = G.V$ usando a notação de atributos[1].

- Um subgrafo H de um grafo G é *próprio*, notação $H \subset G$, se for diferente de G, isto é, se $H.V < G.V$ ou $H.E < G.E$.

- Dado $X \subseteq G.V$, o subgrafo de G *induzido* por X, notação $G[X]$, é o grafo $G' = (X, E')$ onde $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in X\}$.

- Dado $Y \subseteq G.E$, o subgrafo de G *induzido* por Y, notação $G[Y]$, é o grafo $G' = (V', Y)$ onde se $(u, v) \in Y$ então $u, v \in V'$.

[1] Sempre que for conveniente, utilizaremos a notação de atributos $G.V$ (resp. $G.E$) para denotar o conjunto dos vértices (resp. das arestas) do grafo G.

1.1.2 Busca em Largura

Busca em largura (BFS) é um dos algoritmos mais simples para busca em grafos, além de ser utilizado em outros algoritmos sobre grafos. O algoritmo funciona tanto para grafos quanto para digrafos. Dado um grafo $G = (V, E)$ e um vértice $s \in V$ que chamaremos de *origem*, o algoritmo de busca em largura sistematicamente explora as arestas de G para descobrir todos os vértices que são alcançáceis a partir de s. O nome *busca em largura* se dá porque o algoritmo separa a fronteira entre os vértices que já foram descobertos dos que ainda não o foram a partir da sua distância até a origem s. Assim, o algoritmo descobre todos os vértices que estão a uma distância k da origem antes de descobrir qualquer vértice que esteja a uma distância $k + 1$ da origem. Este algoritmo nos permite responder dois tipos de questões:

1. Existe um caminho do vértice s para o vértice u?
2. Qual é o menor caminho do vértice s para o vértice u?

A seguir apresentamos o pseudocódigo do algoritmo BFS, que recebe como argumento o grafo G, e o vértice s a partir do qual a busca é iniciada.

Algorithm 1: BFS(G, s)

```
1  for each vertex u ∈ G.V − {s} do
2  |  u.color ← WHITE;
3  end
4  s.color ← GRAY;
5  Q ← ∅;
6  enqueue(Q, s);
7  while Q ≠ ∅ do
8  |  u ← dequeue(Q);
9  |  for each v ∈ G.Adj[u] do
10 |  |  if v.color = WHITE then
11 |  |  |  v.color ← GRAY;
12 |  |  |  enqueue(Q, v);
13 |  |  end
14 |  end
15 end
```

A inicialização (linhas 1-3) percorre todos os vértices, exceto s, e portanto tem tempo de execução limitado pelo número de vértices do grafo, i.e. $\Theta(V)$. As operações das linhas 4, 5 e 6 são executadas em tempo constante. O *loop* das linhas 7-15 precisa de uma análise mais cuidadosa. Os vértices marcados com WHITE durante a inicialização correspondem aos vértices que ainda não foram visitados e, uma vez que um vértice é visitado, ele é imediatamente marcado com GRAY (linha 11) e inserido na fila Q (linha 12). Durante a primeira execução do *loop*, s é retirado da fila, e cada um dos vértices da lista de adjacências de s é marcado como visitado (GRAY), e então colocado na fila Q. Assim, o percorrimento do grafo inicia pelo vértice s, e em seguida são percorridos todos os vértices adjacentes a s perfazendo um total de $1 + |Adj[s]|$ vértices visitados nesta etapa. Na segunda execução do laço, um vértice adjacente a s, digamos u, é retirado da fila Q e todos os vértices adjacentes a u, que ainda não tenham sido visitados, serão marcados como visitados, e inseridos na fila, de forma que, no máximo, $|Adj[u]|$ vértices serão visitados porque alguns dos elementos em $Adj[u]$ já podem ter sido visitados: de fato, se um vértice v for simultaneamente adjacente aos vértices s e u, que por sua vez é também adjacente a s, então v será inserido na fila na primeira execução do laço, i.e. durante o percorrimento de $Adj[s]$, e será ignorado durante o percorrimento de $Adj[u]$. Portanto $1 + |Adj[s]| + |Adj[u]|$ é uma cota superior para o número de vértices visitados até este momento. Note que um vértice só é inserido na fila uma única vez. Mais ainda, para que um vértice seja inserido na fila Q é necessário que ele seja alcançável a partir de s, e portanto, o processo de enfileiramento e desenfileiramento tem custo limitado por $O(V)$. Cada um dos vértices enfileirados terá sua lista de adjacências percorrida, mas apenas alguns de seus elementos serão visitados. Assim, se $\{s, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é o conjunto de todos os vértices alcançáveis a partir de s no grafo, então todos eles serão inseridos na fila Q logo após serem visitados, o que tem custo limitado por $O(V)$. Em seguida, para cada vértice $u \in \{s, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, os vértices de $Adj[u]$ que ainda não foram visitados são marcados com GRAY, o que tem custo $O(Adj[u])$. Somando este custo para cada um dos vértices

do conjunto $\{s, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, temos custo limitado por $\sum_{u \in \{s, v_1, v_2, \ldots, v_k\}} |Adj[u]| \leq \sum_{u \in V} |Adj[u]| = \Theta(E)$. Assim, o custo total para percorrer o grafo é limitado por $O(V + E)$.

Mais sucintamente: depois da inicialização de BFS (linhas 1-5) nenhum vértice volta a ser marcado com WHITE. Então o teste da linha 13 garante que cada vértice é enfileirado apenas uma vez, e portanto desenfileirado apenas uma vez também. As operações de enfileiramento e desenfileiramento tomam tempo constante $\Theta(1)$, e portanto o tempo requerido pela operação de enfileiramento é da ordem de $O(V)$. Como BFS percorre a lista de adjacências somente quando o vértice é desenfileirado, concluímos que cada lista de adjacências é percorrida apenas uma vez. Como a soma dos comprimentos das listas de adjacências é $\Theta(E)$, o tempo total utilizado no percorrimento das listas de adjacências é limitado por $O(E)$. Portanto BFS possui tempo de execução limitado por $O(V + E)$, isto é, é linear no tamanho da representação de G. Observe que se $|E| \geq |V|$ então $|V| + |E| \leq |E| + |E| = 2.|E|$, e portanto neste caso, $O(V + E)$ significa $O(E)$. Analogamente, se $|E| < |V|$ então $O(V + E)$ significa $O(V)$. Em geral, $O(x + y)$ significa $O(max(x, y))$.

Exercício 1.10. *Considere uma enumeração qualquer $1, 2, \ldots, |V|$ dos vértices de G. A matriz de adjacências $G.A$ de dimensão $|V| \times |V|$ é dada por:*

$$G.A[i][j] = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \in G.E \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3}$$

O pseudocódigo a seguir apresenta o algoritmo BFS onde o grafo G é representado por sua matriz de adjacências:

Algorithm 2: BFS(G, s)

```
1  for i = 1 to |V| do
2  |  i.color ← WHITE;
3  end
4  s.color ← GRAY;
5  Q ← ∅;
6  enqueue(Q, s);
7  while Q ≠ ∅ do
8  |  u ← dequeue(Q);
9  |  for i = 1 to |V| do
10 |  |  if G.A[u][i] = 1 and i.color = WHITE then
11 |  |  |  i.color ← GRAY;
12 |  |  |  enqueue(Q, i);
13 |  |  end
14 |  end
15 end
```

Qual é a complexidade de tempo de BFS neste caso?

1. Aplicação: Caminhos de comprimento mínimo

   O algoritmo BFS também computa a menor distância (menor número de arestas) de s até cada um dos vértices que são alcançáveis a partir de s. Por fim, o algoritmo constrói uma árvore com raiz s que contém todos os vértices alcançáveis a partir de s.

Algorithm 3: BFS(G, s)

```
1  for each vertex u ∈ G.V − {s} do
2  |  u.color ← WHITE;
3  |  u.d ← ∞;
4  |  u.π ← NIL;
5  end
6  s.color ← GRAY;
7  s.d ← 0;
8  s.π ← NIL;
9  Q ← ∅;
10 enqueue(Q, s);
11 while Q ≠ ∅ do
12 |  u ← dequeue(Q);
13 |  for each v ∈ G.Adj[u] do
14 |  |  if v.color = WHITE then
15 |  |  |  v.color ← GRAY;
16 |  |  |  v.d ← u.d + 1;
17 |  |  |  v.π ← u;
18 |  |  |  enqueue(Q, v);
19 |  |  end
20 |  end
21 |  u.color ← BLACK;
22 end
```

Denote por $\delta(s, v)$ o número de arestas do *caminho de comprimento mínimo* de s para v, isto é, o menor número de arestas de qualquer caminho de s para v, e $\delta(s, v) = \infty$ se não existe caminho de s para v.

Lema 1.11. *Seja $G = (V, E)$ um (di)grafo, e $s \in V$. Então para qualquer aresta $(u, v) \in E$, temos $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$.*

Lema 1.12. *Seja $G = (V, E)$ um (di)grafo, e $s \in V$. Então após a execução de BFS(G, s), para cada vértice $v \in V$, temos que $v.d \geq \delta(s, v)$.*

Lema 1.13. *Suponha que durante a execução de BFS no grafo $G = (V, E)$, a fila Q contenha os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_r$, i.e. $Q = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$, onde v_1 é o primeiro elemento, e v_r, o último. Então $v_r.d \leq v_1.d + 1$ e $v_i.d \leq v_{i+1}.d$ para todo $i = 1, 2, \ldots, r - 1$.*

Corolário 1.14. *Suponha que o vértice v_i tenha sido enfileirado antes do vértice v_j durante a execução do algoritmo BFS. Então $v_i.d \leq v_j.d$ no momento em que v_j é enfileirado.*

Por fim, o teorema a seguir estabelece a correção do algoritmo BFS:

Teorema 1.15. *Seja $G = (V, E)$ um (di)grafo, e considere a execução de BFS em G a partir da origem $s \in V$. Então, durante sua execução, BFS descobre cada vértice $v \in V$ que é alcançável a partir de s, e após o término de sua execução, $v.d = \delta(s, v), \forall v \in V$. Adicionalmente, para cada vértice $v \neq s$ alcançável a partir de s, um dos menores caminhos de s para v é o menor caminho de s para $v.\pi$ seguido da aresta $(v.\pi, v)$.*

2. Árvores BFS

O algoritmo BFS constrói uma árvore, a chamada *árvore BFS*, à medida que percorre o grafo. A árvore é obtida a partir do atributo π de cada vértice. Para construirmos esta árvore consideraremos inicialmente o *subgrafo predecessor* de G como sendo o grafo $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$, onde

- $V_\pi = \{v \in V : v.\pi \neq NIL\} \cup \{s\}$
- $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V_\pi \backslash \{s\}\}$

O subgrafo predecessor G_π é a árvore BFS de G se V_π consiste de todos os vértices alcançáveis de G a partir de s, e $\forall v \in V_\pi$ o subgrafo G_π contém um único caminho simples de s para v que é o menor caminho de s para v em G.

Lema 1.16. *Quando aplicado ao (di)grafo $G = (V, E)$, o algoritmo BFS constrói π de forma que o subgrafo predecessor $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ é uma árvore BFS.*

1.1.3 Busca em Profundidade

Nesta seção estudaremos outro algoritmo de busca em grafos, o algoritmo de busca em profundidade (*Depth-first search* - DFS). Neste caso, diferentemente do algoritmo BFS visto anteriormente, a busca vai o mais profundo possível no grafo visitando um vértice adjacente ao vértice que acaba de ser visitado, e em seguida visita outro vértice adjacente ao vértice adjacente visitado até que não seja mais possível, quando a busca retorna (*backtrack*) para o vértice a partir do qual o vértice que não tem mais adjacentes a serem visitados foi descoberto. Este processo de busca continua até que todos os vértices alcançáveis a partir do vértice inicial (fonte) forem visitados. Caso ainda existam vértices não visitados, DFS seleciona algum destes vértices como fonte, e repete esta estratégia de busca. O algoritmo para depois que todos os vértices tenha sido visitados. Vejamos o pseudocódigo de DFS:

Algorithm 4: DFS(G)

```
1  for each vertex u ∈ G.V do
2  |  u.color = WHITE;
3  |  u.π = NIL;
4  end
5  time = 0;
6  for each vertex u ∈ G.V do
7  |  if u.color == WHITE then
8  |  |  DFS-Visit(G, u)
9  |  end
10 end
```

Algorithm 5: DFS-Visit(G, u)

```
1  time = time + 1;
2  u.d = time;
3  u.color = GRAY;
4  for each v ∈ G.Adj[u] do
5  |  if v.color == WHITE then
6  |  |  v.π = u;
7  |  |  DFS-Visit(G, v)
8  |  end
9  end
10 u.color = BLACK;
11 time = time + 1;
12 u.f = time;
```

Qual o tempo de execução de DFS? O laço das linhas 1-4 é executado em tempo $\Theta(V)$. Já o laço das linhas 6-10 exige um pouco mais de atenção porque este laço faz uma chamada ao algoritmo DFS-visit. Então vamos determinar o custo de DFS-Visit primeiro. Em cada execução de DFS-Visit(G, u), o *loop* das linhas 4-9 é executado $|Adj[u]|$ vezes. Como

$$\sum_{v \in V} |Adj[v]| = \Theta(E)$$

o custo total de DFS-Visit é $\Theta(E)$, e portanto, o custo total de DFS é $\Theta(V + E)$.

Definição 1.17. *O* subgrafo predecessor *da busca em profundidade é definido por:*

- $G_\pi = (V, E_\pi)$, *onde* $E_\pi = \{(v.\pi, v) : v \in V \text{ and } v.\pi \neq NIL\}$

O subgrafo predecessor de uma busca em profundidade forma uma floresta.

Teorema 1.18. *Para dois vértices u e v quaisquer de um (di)grafo G, apenas uma das seguintes propriedades ocorre em uma busca em profundidade (DFS) em G, considerando que $u.d < v.d$:*

1. *$u.d < v.d < v.f < u.f$, e v é um descendente de u no subgrafo predecessor de G;*
2. *$u.d < u.f < v.d < v.f$, e u não é um descendente de v no subgrafo predecessor de G, ou vice-versa.*

Teorema 1.19. *Seja $G = (V, E)$ um grafo, e considere a floresta F obtida após a execução de DFS(G). As componentes de F são precisamente as componentes conexas de G.*

Corolário 1.20. *As componentes conexas de um grafo $G = (V, E)$ podem ser encontradas em tempo $\Theta(V + E)$.*

1. Aplicação: Componentes fortemente conexas

   Nesta seção veremos como determinar as componentes fortemente conexas de um digrafo. É fácil ver que a estratégia que utilizamos para determinar as componentes conexas de um grafo não funciona para digrafos. De fato, ao executarmos DFS a partir de um vértice u, percorremos todos os vértices alcançáveis a partir de u, e terminamos com uma árvore que tem u como raiz e cujos vértices não estão fortemente conectados. Uma componente fortemente conexa de um digrafo $G = (V, E)$ é um conjunto maximal de vértices $C \subseteq V$ tal que para qualquer par de vértices u e v em C, temos que $u \rightsquigarrow v$ e $v \rightsquigarrow u$, ou seja, u e v são mutuamente alcançáveis. O algoritmo que apresentaremos a seguir utiliza o digrafo G^T, chamado de *transposto de G*, definido por $G^T = (V, E^T)$, onde $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

   Exercício 1.21. *Construa um algoritmo eficiente para computar o digrafo transposto G^T de G a partir da lista de adjacências de G, e em seguida faça a análise assintótica do algoritmo.*

   Exercício 1.22. *Construa um algoritmo eficiente para computar o digrafo transposto G^T de G a partir da matriz de adjacências de G, e em seguida faça a análise assintótica do algoritmo.*

   A ideia do algoritmo que veremos a seguir está baseada no fato de que, para qualquer digrafo G, tanto G quanto G^T possuem as mesmas componentes fortemente conexas. De fato, u e v são mutualmente alcançáveis em G, se e somente se, u e v são mutualmente alcançáveis em G^T.

Algorithm 6: SCC(G)

1 Execute DFS(G) para computar o tempo de finalização $u.f$ para cada vértice u;
2 Compute G^T;
3 Execute DFS(G^T) escolhendo os vértices em ordem decrescente do tempo de finalização;
4 Retorne os vértices de cada árvore da floresta computada na linha anterior como uma componente fortemente conexa separada.

Cada conjunto de vértices retornado pelo algoritmo SCC constitui um vértice do grafo $G^{scc} = (V^{scc}, E^{scc})$, chamado de *grafo das componentes fortes* de G, cujos vértices correspondem às componentes fortemente conexas de G, digamos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ e, $(C_i, C_j) \in E^{scc}$ se $i \neq j$ e existe alguma aresta de G que sai de um vértice de C_i e chega em um vértice de C_j. O grafo das componentes conexas tem como propriedade fundamental não possuir ciclos. Um digrafo sem ciclo é normalmente chamado de DAG (*directed acyclic graph*).

A seguir, estenderemos a noção de tempo de início e finalização de um vértice para conjuntos de vértices. Esta extensão será necessária para provarmos a correção do algoritmo SCC.

Definição 1.23. *Se $U \subseteq V$ então definimos $d(U) = \min_{u \in U}\{u.d\}$ e $f(U) = \max_{u \in U}\{u.f\}$*

Ou seja, $d(U)$ representa o tempo do primeiro vértice que foi visitado do conjunto U, enquanto que $f(U)$ denota o tempo do último vértice de U a ter a visita finalizada.

Lema 1.24. *Sejam C e C' duas componentes fortemente conexas de um digrafo $G = (V, E)$. Suponha que exista uma aresta $(u, v) \in E$ tal que $u \in C$ e $v \in C'$. Então $f(C) > f(C')$.*

Corolário 1.25. *Sejam C e C' duas componentes fortemente conexas de um digrafo $G = (V, E)$, e suponha que $f(C) > f(C')$. Então E^T não possui aresta (v, u) tal que $u \in C'$ e $v \in C$.*

Teorema 1.26. *O algoritmo SCC computa corretamente as componentes fortemente conexas de um digrafo G dado como argumento.*

1.1.4 Árvores Geradoras Mínimas

1. Introdução

   Nesta seção estudaremos o problema de determinar a árvore geradora mínima (*minimum spanning tree*) de um grafo G com pesos [1]. Este problema possui diversas aplicações, como na construção de conexões em redes de computadores, conexões viárias entre diversos pontos de uma cidade ou circuitos eletrônicos onde as componentes dos circuitos são ligadas por fios. No contexto dos circuitos eletrônicos, desejamos, em geral, utilizar a menor quantidade possível de fios. Podemos modelar este problema a partir de um grafo $G = (V, E)$, onde V corresponde ao conjunto de componentes do circuito, e E o conjunto de ligações entre duas destas componentes. O peso $w(u, v)$ da aresta (u, v) especifica o custo (quantidade de fios) necessário para conectar u e v. Portanto desejamos encontrar uma árvore $T \subseteq E$ que conecta todos os vértices de G e cujo peso total

$$w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u, v)$$

   seja mínimo.

   Formalmente, uma árvore geradora é definida como a seguir:

   Definição 1.27. *Sejam $G = (V, E)$ um grafo e G' um subgrafo de G que seja uma árvore. Dizemos que G' é uma* árvore geradora (spanning tree) *de G se contém todos os vértices de G.*

   Sabemos que árvores são conexas, e portanto se o grafo G possui árvore geradora então G é necessariamente conexo. Reciprocamente, se G é um grafo conexo então G possui pelo menos uma árvore geradora.

   Definição 1.28. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com função peso w. Uma* árvore geradora mínima *(*Minimum Spanning Tree *(MST)) de G é uma árvore geradora de custo mínimo, isto é, tal que a soma dos pesos de suas arestas é mínimo.*

   Assim, G' é uma árvore geradora mínima do grafo G se contém todos os vértices de G e nenhuma outra árvore geradora de G possui custo estritamente menor do que G'.

   Quantas árvores geradoras um qualquer grafo possui?

   Teorema 1.29. *[Cayley, 1889] Existem V^{V-2} árvores geradoras em um grafo completo com V vértices.*

   Portanto, utilizar um algoritmo força bruta para obter uma árvore geradora mínima não é uma boa ideia. Inicialmente, definiremos um método genérico que manipula o conjunto $A \subseteq E$ de arestas baseado na seguinte invariante:

Antes de cada iteração, o conjunto A é um subconjunto de alguma árvore geradora mínima de G.

   A ideia é adicionar novas arestas ao conjunto A de forma a não violar a invariante acima. Chamaremos de *seguras* (*safe*) as arestas que podem ser adicionadas ao conjunto A sem violar a invariante. Desta forma, o procedimento genérico para construir árvores geradoras mínimas em grafos conexos é dado como a seguir:

Algorithm 7: Generic-MST(G, w)

```
1 A = ∅;
2 while A does not form a spanning tree do
3 |   find a safe edge (u, v) for A;
4 |   A = A ∪ {(u, v)};
5 end
6 return A;
```

Como identificar uma aresta segura? A seguir veremos uma regra para reconhecer arestas seguras.

Definição 1.30. *Um* corte $(S, V - S)$ *de um grafo* $G(V, E)$ *é uma partição de* V*. Dizemos que a aresta* (u, v) cruza o corte*, se* $u \in S$ *e* $v \in S - V$*. Dizemos que o corte* respeita *o conjunto* A *de arestas se nenhuma aresta de* A *cruza o corte. Uma aresta que cruza um corte é dita* leve *se tem peso mínimo dentre todas as arestas que cruzam o corte.*

Teorema 1.31. *Sejam* $G = (V, E)$ *um grafo conexo com função peso* w*, e* $A \subseteq E$ *um conjunto contido em alguma árvore geradora mínima de* G*. Se* $(S, V - S)$ *é um corte de* G *que respeita* A*, e* (u, v) *é uma aresta leve que cruza o corte* $(S, V - S)$*, então* (u, v) *é segura para* A*.*

Prova. Construiremos uma árvore geradora mínima de G que contém a aresta (u, v). □

Corolário 1.32. *Sejam* $G = (V, E)$ *um grafo conexo com função peso* w*,* $A \subseteq E$ *um conjunto contido em alguma árvore geradora mínima de* G*, e* $C = (V_C, E_C)$ *uma componente conexa na floresta* $G_A = (V, A)$*. Se* (u, v) *é uma aresta leve que conecta* C *a outra componente em* G_A *então* (u, v) *é segura para* A*.*

Exercício 1.33. *Seja* (u, v) *uma aresta de peso mínimo em um grafo conexo* G*. Mostre que* (u, v) *pertence a alguma árvore geradora mínima de* G*.*

2. O algoritmo de Prim

   O algoritmo de Prim (Robert C. Prim, 1957) consiste em uma especialização do algoritmo genérico dado acima. Para construir uma árvore geradora mínima de um grafo G conexo com função peso w, o algoritmo vai partir de um vértice r dado como entrada. A árvore então será desenvolvida a partir de r, que chamaremos de raiz da árvore geradora mínima. A ideia é que em cada passo, o algoritmo vai adicionar uma nova aresta leve à árvore construída a partir de r. Pelo Corolário 1.32, temos que cada aresta adicionada à árvore é segura. O algoritmo de Prim é classificado como algoritmo guloso porque em cada passo a aresta que é adicionada à árvore é a que tem menor peso dentre as que podem ser selecionadas. Ou seja, a estratégia gulosa, a cada passo, faz a escolha local ótima na esperança de obter uma solução ótima global. Algumas considerações:

   (a) A estratégia gulosa nem sempre produz uma solução ótima;

   (b) Para aplicar a estratégia gulosa devemos observar 2 pontos:

      i. O subproblema deve possuir a propriedade da subsestrutura ótima, e;

      ii. O subproblema deve possui a propriedade da escolha gulosa: uma solução ótima global pode ser obtida a partir de escolhas gulosas ótimas locais.

   Uma implementação eficiente do algoritmo de Prim necessita de uma forma rápida para selecionar uma aresta segura a ser inserida na árvore construída até aquele momento. Para isto, todos os vértices que ainda não fazem parte da árvore em construção são armazenados em uma fila de prioridade, onde o atributo *key* de cada vértice corresponde à sua prioridade. Uma maneira eficiente de implementar filas de prioridade é utilizando *heaps*. No caso de um *heap* de máximo (resp. mínimo) teremos uma fila de prioridade de máximo (resp. mínimo). No caso do algoritmo de Prim utilizaremos filas de prioridade de mínimo que possuem as seguintes operações:

   - Insert(S, k): ins a chave k no conjunto S:

Algorithm 8: Insert(S, k)

```
1 S.heap_size ← S.heap_size + 1;
2 S[S.heap_size] ← ∞;
3 Decrease-Key(S, S.heap_size, k);
```

- Decrease-Key(S, i, k): decrementa o valor da chave $S[i]$ para o novo valor k, que deve ser menor ou igual a $S[i]$:

Algorithm 9: Decrease-Key(S, i, k)

```
1 if k > S[i] then
2 |   error "new key is larger than current key";
3 end
4 S[i] ← k;
5 while i > 1 and S[Parent(i)] > S[i] do
6 |   exchange S[i] with S[Parent(i)];
7 |   i ← Parent(i);
8 end
```

Este algoritmo tem complexidade $O(\lg n)$ que corresponde ao comprimento máximo da distância entre o elemento que teve sua prioridade alterada (linha 4), e a raiz do *heap*.

- Minimum(S): retorna o elemento de S com a maior prioridade, ou seja, o elemento de S que possui a menor chave:

Algorithm 10: Minimum(S)

```
1 if S.heap_size < 1 then
2 |   error "heap underflow";
3 end
4 min ← S[1];
```

- Extract-Min(S): remove e retorna o elemento de S que possui a menor chave:

Algorithm 11: Extract-Min(S)

```
1 min ← Minimum(S);
2 S[1] ← S[S.heap_size];
3 S.heap_size ← S.heap_size − 1;
4 Min-Heapify(S, 1);
5 return min;
```

onde Min-Heapify é dada por:

Algorithm 12: Min-Heapify(S, i)

```
1  l ← 2i;
2  r ← 2i + 1;
3  if l ≤ S.heap-size and S[l] < S[i] then
4  |   smallest ← l;
5  end
6  else
7  |   smallest ← i;
8  end
9  if r ≤ S.heap-size and S[r] < S[smallest] then
10 |   smallest ← r;
11 end
12 if smallest ≠ i then
13 |   exchange S[i] with S[smallest];
14 |   Min-Heapify(S,smallest);
15 end
```

A complexidade de Min-Heapify é obtida a partir da recorrência $T(n) \leq T(2n/3) + O(1)$ que tem solução $O(\lg n)$ (Veja a aula sobre o algoritmo *heapsort*). Assim, a complexidade de Extract-Min é também $O(\lg n)$.

O algoritmo de Prim é dado como a seguir:

Algorithm 13: MST-Prim(G, w, r)

```
1  for each vertex v ∈ G.V do
2  |  u.key ← ∞;
3  |  u.π ← NIL;
4  end
5  r.key ← 0;
6  Q ← ∅ ;                                          // Inicializa uma fila vazia
7  for each vertex u ∈ G.V do
8  |  Insert(Q, u);
9  end
10 while Q ≠ ∅ do
11 |  u ← Extract-Min(Q);
12 |  for each v ∈ G.Adj[u] do
13 |  |  if v ∈ Q and w(u, v) < v.key then
14 |  |  |  v.π ← u;
15 |  |  |  v.key ← w(u, v);
16 |  |  |  Decrease-Key(Q, v, w(u, v));
17 |  |  end
18 |  end
19 end
```

Agora conclua que a complexidade do algoritmo de Prim é $O((V + E) \lg V) = O(E \lg V)$, pois $E \geq V - 1$ em um grafo conexo.

Por fim, a correção do algoritmo de Prim pode ser estabelecida pelo seguinte teorema:

Teorema 1.34. *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com função peso w, e $r \in V$. Após a execução de MST-Prim(G, w, r), o subgrafo $G' = (V', E')$ com $V' = \{v \in V : v.\pi \neq NIL\} \cup \{r\}$ e $E' = \{(v.\pi, v) : v \in V' - \{r\}\}$ é uma árvore geradora mínima de G.*

Prova. O algoritmo mantém a seguinte invariante: Antes de cada iteração do laço **while** (linhas 10-19), temos:

(a) $A = \{(v, v.\pi) : v \in V - \{r\} - Q\}$;

(b) Os vértices já colocados na árvore geradora mínima são os que estão em $V - Q$.

(c) Para todos os vértices $v \in Q$, se $v.\pi \neq NIL$ então $v.key < \infty$ e $v.key$ é igual ao peso da aresta leve $(v, v.\pi)$ que conecta v a algum vértice que já faz parte da árvore geradora mínima.

□

2 Exercícios

Exercício 2.1. *Considere o problema da mochila booleana (ou problema da mochima 0-1): Dado um conjunto de n objetos com peso w_i e valor v_i $1 \leq i \leq n$, e uma mochila com capacidade de carregar o peso W, onde W, w_i e v_i são inteiros para $1 \leq i \leq n$, quais objetos devem ser colocados na mochila para que o valor total seja máximo? Mostre que a estratégia gulosa não resolve este problema, e construa uma solução utilizando programação dinâmica para este problema.*

Exercício 2.2. *Considere o problema da mochila fracionária: Considere n objetos com peso w_i e valor v_i $1 \leq i \leq n$, e uma mochila com capacidade de peso W, de forma que frações de cada objeto podem ser selecionadas. Que fração de cada objeto deve ser colocada na mochila de modo a maximizar o valor*

total? Em outras palavras, selecione frações $f_i \in [0,1]$ *dos itens tais que* $\sum_{i=1}^{n} f_i.w_i \leq W$ *e* $\sum_{i=1}^{n} f_i.v_i$ *é máximo. Mostre que este problema possui a propriedade da escolha gulosa.*

Exercício 2.3. *Seja* (u, v) *uma aresta de peso mínimo em um grafo conexo* G*. Mostre que* (u, v) *pertence a alguma árvore geradora mínima de* G*.*

Exercício 2.4. *Mostre que um grafo possui uma única árvore geradora mínima se, para todo corte do grafo, existe uma única aresta leve que cruza o corte. Mostre que a outra direção desta afirmação é falsa.*

Exercício 2.5. *Construa uma implementação do algoritmo de Prim utilizando a representação de matriz de adjacências para o grafo* G*. Em seguida, faça a análise assintótica do algoritmo.*

3 Leitura complementar:

- [2] (Capítulo 15 e 21)
- [1] (Capítulo 16 e 23)
- [3] (Capítulo 9)

Referências

[1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms, Third Edition.* The MIT Press, 3rd edition, 2009.

[2] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms.* MIT Press, Cambridge, MA, USA, 4 edition, April 2022.

[3] A. V. Levitin. *Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, Third Edition.* Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2012.