Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

Projeto e Análise de Algoritmos (2024-1)

Lista de exercícios

Prof. Flávio L. C. de Moura

4 de setembro de 2024

Questão 1. *Mostre como podemos ordenar n inteiros contidos no intervalo de 0 a $n^4 - 1$ em tempo linear.*

Solução

Inicialmente iteramos pela lista dos números, convertendo cada um deles para a base n. Depois aplicamos o algoritmo radix-sort sobre a lista, utilizando o counting-sort como o algoritmo de ordenação dos dígitos da lista de números. Dada a nova base, cada número possuirá 4 dígitos, uma vez que $\log_n(n^4) = 4$, onde cada dígito estará em um intervalo entre 0 e $n - 1$. Sabendo disso, radix-sort ordenará n números de 4 dígitos, usando o counting-sort em um intervalo de 0 à $n - 1$, resultando em uma complexidade de $O(4(n + n)) = O(n)$.

Questão 2. *Considere o seguinte problema: Há uma fila de n moedas cujos valores são alguns inteiros positivos $c_1, c_2, ..., c_n$, não necessariamente distintos. O objetivo é pegar a quantidade máxima de dinheiro sujeita à restrição de que não se pode pegar duas moedas adjacentes na fila inicial.*

1. *Construa uma recorrência para calcular o montante máximo $F(n)$ que pode ser obtido de uma fila com n moedas.*

   Solução

   $$F(n) = \begin{cases} 0, & \textit{se } n = 0 \\ c_1, & \textit{se } n = 1 \\ \max(c_n + F(n-2), F(n-1)), & \textit{se } n > 1 \end{cases}$$

2. *É fácil ver que a solução força bruta para este problema tem complexidade exponencial. Construa uma solução utilizando programação dinâmica, ou seja, escreva o pseudocódigo, e em seguida faça a análise assintótica da sua solução.*

   Solução

   A ideia é ir armazenando as soluções dos problemas menores no vetor F (abordagem bottom up*) de forma que o mesmo subproblema não será computado mais de uma vez. A entrada do algoritmo é o vetor C contendo os valores $c_1, c_2, \ldots, c_n$ das moedas.*

   ```
   F[0] ← 0;
   F[1] ← C[1];
   for i = 2 to n do
       F[i] ← max(C[i] + F[i − 2], F[i − 1]);
   end
   return F[n];
   ```

Questão 3. *Considere um tabuleiro $m \times m$, onde cada uma das m^2 posições contém uma pedra azul, uma pedra vermelha ou não contém nada. Você joga removendo pedras do tabuleiro de forma que se* *uma coluna do tabuleiro tiver pedras então todas devem ser da mesma cor, e cada linha deve conter pelo menos uma pedra. Você ganha se atinge este objetivo. Dependendo da configuração inicial, pode-se ganhar ou não. Assim, denotando por T a configuração inicial do tabuleiro, representaremos o problema correspondente a este jogo por $S = \{T$ corresponde a uma configuração vencedora$\}$. Considere a seguinte transformação: Dada uma instância φ de 3-SAT com m variáveis $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e k cláusulas $\varphi = (l_1^1 \vee l_2^1 \vee l_3^1) \wedge (l_1^2 \vee l_2^2 \vee l_3^2) \wedge \ldots \wedge (l_1^k \vee l_2^k \vee l_3^k)$, construa um tabuleiro $k \times m$, assumindo que nenhuma cláusula de φ contém simultaneamente as variáveis v_i e $\overline{v_i}$ (tais cláusulas podem ser removidas sem afetar a satisfatibilidade de φ), da seguinte forma:*

1. *Se x_i ocorre na cláusula c_j coloque uma pedra azul na linha c_j e coluna x_i.*
2. *Se $\overline{x_i}$ ocorre na cláusula c_j coloque uma pedra vermelha na linha c_j e coluna x_i.*

O tabuleiro pode ser completado, para que tenha o mesmo número de linhas e colunas, repetindo uma linha ou adicionando uma coluna em branco sem afetar a solvabilidade. Mostre que:

1. *Mostre que se φ é satisfatível então T possui uma solução.*

   Solução

   Como φ é satisfatível, então considere uma designação d que faz com que cada cláusula de φ seja verdadeira. Se x_i é verdadeira (resp. falsa) segundo a designação d então remova as pedras vermelhas (resp. azuis) da coluna x_i. Portanto, pedras que correspondem a literais verdadeiros permanecem, e como toda cláusula possui um literal verdadeiro, toda linha possui uma pedra.

2. *Mostre que se T possui uma solução então φ é satisfatível.*

   Solução

   Considere uma solução de T. Se pedras vermelhas (resp. azuis) foram removidas de uma coluna então associe o valor verdadeiro (resp. falso) à variável correspondente. Como cada linha possui uma pedra, toda cláusula possui um literal positivo, e portanto φ é satisfatível.

Questão 4. *Mostre que o problema S, apresentado na questão anterior, é NP-completo.*

Solução

Inicialmente, precisamos mostrar que S está na classe NP, mas é trivial verificar que uma configuração é uma solução em tempo polinomial. Resta mostrar que S é NP-difícil. Pela solução do exercício anterior, temos que 3-SAT $\leq_p$ S, e como 3-SAT é NP-completo, concluímos que S é NP-completo.