Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação

Projeto e Análise de Algoritmos (2024-1)

Lista de exercícios

Prof. Flávio L. C. de Moura

10 de setembro de 2024

Exercício 1. *Considere o algoritmo a seguir, onde $G = (V, E)$ é um grafo, $u \in V$ é um vértice de G e F uma fila inicialmente vazia:*

marque u;
insira u na fila F;
while $F \neq \emptyset$ **do**
    retire o primeiro elemento v de F;
    for *each* $w \in G.Adj[v]$ **do**
        if *w não está marcado* **then**
            marque w;
            insira w em F;
        end
    end
end

Algoritmo 1: algoritmo(G, u)

Faça a análise assintótica do tempo de execução deste algoritmo.

> *Solução*
>
> *Este algoritmo visita todos os vértices do grafo G que são alcançáveis a partir do vértice u utilizando busca em largura. As operações de inserir e retirar um elemento da fila têm tempo constante, de forma que o tempo total destinado a estas operações é $O(V)$ no pior caso (*i.e. *quando G é conexo). Como a lista de adjacências de um vértice só é visitada quando este vértice é retirado da fila, cada lista de adjacências é visitada somente uma vez. Como a soma do comprimento de todas as listas de adjacências é $\Theta(E)$, então concluímos que este algoritmo está em $O(V + E)$, ou seja, é linear no tamanho da representação da lista de adjacências de G.*

Exercício 2. *Seja $G = (V, E)$ um grafo (não-dirigido) conexo com função peso $w : E \to \mathbb{R}$. Dizemos que uma aresta de G é* útil *se não ocorre em nenhum ciclo de G. Prove que qualquer árvore geradora mínima de G contém todas as arestas úteis de G.*

> *Solução*
>
> *Suponha que exista uma árvore geradora mínima T de G que não possua a aresta útil $(u, v) \in G.E$. Seja p o caminho simples que une u a v em T. Ao adicionarmos a aresta (u, v) ao caminho p obtemos um ciclo em G, o que contradiz o fato de (u, v) ser útil.*

Exercício 3. *Seja A um problema de decisão na classe P. Demonstre que se um problema B pode ser reduzido polinomialmente ao problema A, então $B \in P$.*

Solução

Seja A' um algoritmo polinomial para o problema de decisão A, e F um algoritmo de redução polinomial que transforma instâncias I do problema B em instâncias $F(I)$ do problema A tal que I é uma instância SIM de B, se e somente se, $F(I)$ é uma instância SIM de A. Considere o algoritmo B' que inicialmente usa F para transformar instâncias de B em instâncias de A, e então usa o algoritmo A' para responder. A composição dos algoritmos A' e F é um algoritmo para o problema B, e esta solução é polinomial porque é formada pela composição de dois algoritmos polinomiais. Logo $B \in P$.

Exercício 4. *Considere o seguinte jogo em um grafo (não-dirigido) G, que inicialmente contém 0 ou mais bolas de gude em seus vértices: um movimento deste jogo consiste em remover duas bolas de gude de um vértice $v \in G$, e adicionar uma bola a algum vértice adjacente de v. Agora, considere o seguinte problema: Dado um grafo G, e uma função $p(v)$ que retorna o número de bolas de gude no vértice v, existe uma sequência de movimentos que remove todas as bolas de G, exceto uma? Mostre que este problema é NP-completo.*

Solução

Inicialmente, mostraremos que este jogo é NP-difícil construindo uma redução polinomial do problema do caminho Hamiltoniano (HAMPATH) para ele. Seja $\langle G, u, v \rangle$ uma instância de HAMPATH. Construiremos uma instância $\langle G', p \rangle$ do jogo da seguinte forma: $G' = G$, $p(u) = 2$, $p(v) = 0$ e $p(x) = 1, \forall x \in G.V \setminus \{u, v\}$.

***Afirmação**: $\langle G, u, v \rangle$ tem um caminho Hamiltoniano, se e somente se, $\langle G', p \rangle$ tem uma solução. Suponha que $\langle G, u, v \rangle$ tenha um caminho Hamiltoniano de u para v, digamos $\langle u = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = v \rangle$. Vamos construir uma sequência de movimentos da seguinte forma: Como o vértice u de G' é o único vértice contendo duas bolas $\langle G', p \rangle$, removemos as duas bolas de u e adicionamos uma bola no vértice adjacente x_1. Em seguida, removemos as duas bolas do vértice x_1, e adicionamos uma bola no vértice x_2, e assim prosseguimos ao longo do caminho Hamiltoniano $\langle u = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = v \rangle$. Note que no último passo removeremos as duas bolas do vértice x_{n-1} e adicionaremos uma bola no vértice v. Desta forma, finalizamos com G' contendo apenas uma bola no vértice v, e as bolas de todos os outros vértices foram removidas.*

Suponha que exista uma sequência de movimentos que remove todas as bolas de G', exceto uma. Pela forma como G' foi construído, apenas um de seus vértices contém duas bolas, digamos x_0, e portanto a sequência de movimentos tem que iniciar em x_0. Adicione cada vértice visitado por esta sequência de movimentos ao caminho, na ordem em que a visita é feita. Nenhum vértice pode ser visitado mais de uma vez porque, com exceção de x_0 e de x_n, todos os vértices possuem apenas uma bola. Todos os vértices têm que ser visitados porque esta é a única forma de remover as bolas. Assim, a sequência de movimento constrói um caminho Hamiltoniano em G', e portanto $G(= G')$ possui um caminho Hamiltoniano.