Projeto e Análise de Algoritmos (2025-1)

Flávio L. C. de Moura*

10 de julho de 2025

Exercícios para a prova 2

1. Mostre como podemos ordenar n inteiros contidos no intervalo de 0 a $n^2 - 1$ em tempo linear, ou seja, em $O(n)$.

2. Considere o seguinte problema: Há uma fila de n moedas cujos valores são alguns inteiros positivos $c_1, c_2, ..., c_n$, não necessariamente distintos. O objetivo é pegar a quantidade máxima de dinheiro sujeita à restrição de que não se pode pegar duas moedas adjacentes na fila inicial.

   (a) Construa uma recorrência para calcular o montante máximo $F(n)$ que pode ser obtido de uma fila com n moedas.

   (b) Construa uma solução (pseudocódigo) utilizando programação dinâmica e faça a análise assintótica da sua solução.

3. O problema da mochila possui duas versões:

   (a) O problema da mochila inteira: Dado um conjunto de n objetos com peso w_i e valor v_i $1 \leq i \leq n$, e uma mochila com capacidade de carregar o peso W, onde W, w_i e v_i são inteiros para $1 \leq i \leq n$, quais objetos devem ser colocados na mochila para que o valor total seja máximo?

   (b) O problema da mochila fracionária: Considere n objetos com peso w_i e valor v_i $1 \leq i \leq n$, e uma mochila com capacidade de peso W, de forma que frações de cada objeto podem ser selecionadas. Que fração de cada objeto deve ser colocada na mochila de modo a maximizar o valor total? Em outras palavras, selecione frações $f_i \in [0, 1]$ dos itens tais que $\sum_{i=1}^{n} f_i.w_i \leq W$ e $\sum_{i=1}^{n} f_i.v_i$ é máximo.

*flaviomoura@unb.br

Podemos utilizar a estratégia gulosa (resp. programação dinâmica) para resolver as duas versões deste problema? Justifique sua resposta.

4. Construa um algoritmo eficiente para calcular o coeficiente binomial $C(n, k)$, também denotado por $\binom{n}{k}$, sem utilizar multiplicações. Em seguida, faça a análise assintótica do seu algoritmo.

5. Um *conjunto independente* em um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $V' \subseteq V$ de vértices dois a dois não adjacentes. O problema do conjunto independente (INDEPENDENT-SET) consiste em, dados um grafo G e um inteiro k determinar se G possui um conjunto independente de tamanho k. Mostre que INDEPENDENT-SET é NP-difícil. Para isto, transforme uma instância $\varphi = (l_1^1 \vee l_2^1 \vee l_3^1) \wedge (l_1^2 \vee l_2^2 \vee l_3^2) \wedge \ldots \wedge (l_1^m \vee l_2^m \vee l_3^m)$ em um grafo G_φ onde cada literal de φ corresponde a um vértice de G_φ, os três vértices que formam uma cláusula de φ são representados por um 3-clique em G_φ, e vértices originados de cláusulas distintas com nomes contraditórios, por exemplo x e $\overline{x}$ são ligados por uma aresta, e conclua que φ é satisfatível se, e somente se, G_φ possui um conjunto independente de tamanho m.