Projeto e Análise de Algoritmos (2025-1)

Flávio L. C. de Moura*

28 de maio de 2025

Heapsort

Exercício:

Ordene os n elementos de um vetor $A[1..n]$ da seguinte forma: encontre o maior elemento de A e troque este elemento com o elemento $A[n]$. Em seguida, encontre o maior elemento de $A[1..n-1]$ e troque este elemento com $A[n-1]$, e assim por diante até que o vetor A esteja ordenado.

Escreva o pseudocódigo do seu algoritmo.

Solução força-bruta:

Algorithm 1: selection-sort(A)

```
1 for i = n downto 2 do
2 |   max ← i;
3 |   for j = i − 1 downto 1 do
4 |   |   if A[j] > A[max] then
5 |   |   |   max ← j;
6 |   |   end
7 |   end
8 |   swap A[i] and A[max];
9 end
```

- Análise assintótica:
  $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1).n}{2} = \Theta(n^2).$

- A correção pode ser provada a partir da seguinte invariante:

  Antes de cada iteração do laço **for** indexado por i (linhas 1-8), o subvetor $A[i+1..n]$ está ordenado e contém os $(n-i)$ maiores elementos do vetor A.

*flaviomoura@unb.br

O algoritmo Heapsort

Estudaremos um novo algoritmo de ordenação baseado em comparação de chaves, mas bem diferente dos algoritmos (*insertion sort* e *mergesort*) vistos anteriormente. Este novo algoritmo, conhecido como *heapsort*, possui tempo de execução $O(n. \log n)$, como *mergesort*, e o processo de ordenação é feito *in place* (como em *insertion sort*). Portanto *heapsort* combina as vantagens de *insertion sort* e *mergesort*. A estrutura de dados utilizada por este algoritmo é conhecida como *heap*:

DEF. Um *heap* (binário) T é uma estrutura de dados que corresponde a uma árvore binária com chaves associadas aos nós, sendo uma chave por nó, que satisfaz às seguintes condições:

1. T é uma árvore binária completa em todos os níveis, exceto possivelmente o último nível;

2. Todos os caminhos para uma folha do último nível estão à esquerda de todos os caminhos para uma folha do penúltimo nível;

3. A chave de cada nó é maior ou igual do que a chave dos seus filhos.

Os itens 1 e 2 da definição acima caracterizam a chamada de **propriedade do corpo do /heap**. O item 3 corresponde a **propriedade de heap** (de máximo).

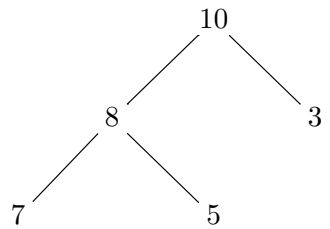
Segundo a propriedade 2, uma enumeração dos nós de um *heap* deve começar de cima para baixo, *i.e.* a partir da raiz do *heap*, e da esquerda para a direita.

Assim, em um *heap* o nó mais à direita pode ter apenas um filho à esquerda, mas não pode ter somente um filho à direita.

Todos os outros nós internos possuem dois filhos.

- Exemplo 1

  A figura abaixo é um *heap* de máximo:



  DEF. Um *heap* (binário) T é uma estrutura de dados que corresponde a uma árvore binária com chaves associadas aos nós, sendo uma chave por nó, que satisfaz às seguintes condições:

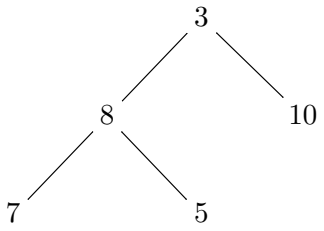
1. T é uma árvore binária completa em todos os níveis, exceto possivelmente o último nível;

2. Todos os caminhos para uma folha do último nível estão à esquerda de todos os caminhos para uma folha do penúltimo nível;

3. A chave de cada nó é maior ou igual do que a chave dos seus filhos.

- Exemplo 2

  A figura abaixo não é um *heap de máximo* porque não satisfaz a propriedade 3:



  DEF. Um *heap* (binário) T é uma estrutura de dados que corresponde a uma árvore binária com chaves associadas aos nós, sendo uma chave por nó, que satisfaz às seguintes condições:

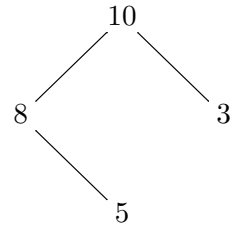
1. T é uma árvore binária completa em todos os níveis, exceto possivelmente o último nível;

2. Todos os caminhos para uma folha do último nível estão à esquerda de todos os caminhos para uma folha do penúltimo nível;

3. A chave de cada nó é maior ou igual do que a chave dos seus filhos.

- Exemplo 3

  A figura abaixo não é um *heap* porque não satisfaz a propriedade 1:



  DEF. Um *heap* (binário) T é uma estrutura de dados que corresponde a uma árvore binária com chaves associadas aos nós, sendo uma chave por nó, que satisfaz às seguintes condições:

1. T é uma árvore binária completa em todos os níveis, exceto possivelmente o último nível;

2. Todos os caminhos para uma folha do último nível estão à esquerda de todos os caminhos para uma folha do penúltimo nível;

3. A chave de cada nó é maior ou igual do que a chave dos seus filhos.

- Propriedades

  A grande vantagem da estrutura de *heap* é que ela permite a implementação das operações de inserção de um novo elemento (ou uma nova chave), e extração do maior elemento (maior chave) em tempo logarítmico.

  Note que em um vetor (ou em uma lista), a inserção pode ser feita em tempo constante, mas a extração do maior elemento vai exigir, no pior caso, uma busca em todo o vetor (ou lista), o que tem custo linear.

  A estrutura de *heap* suporta simultaneamente as duas operações, e como veremos, de forma assintoticamente mais eficiente do que em listas ou vetores.

  – Implementação em vetores

    Um *heap* binário pode ser implementado como um subvetor de um vetor A, onde somente os elementos em $A[1..A.\text{heap-size}]$ ($0 \leq A.\text{heap-size} \leq A.length$) são elementos válidos do *heap*. A raiz do *heap* é $A[1]$, e dado o índice i de um nó, o índice do filho à esquerda (resp. direita) é $2i$ (resp. $2i + 1$), enquanto que o índice do nó correspondente ao pai do nó de índice i é igual a $\lfloor i/2 \rfloor$.

    Alguns autores chamam a estrutura definida acima de *heap* de máximo (ou *max-heap*), isto é, um *heap* onde todo nó i diferente da raiz é tal que $A[\lfloor i/2 \rfloor] \geq A[i]$. Analogamente, podemos definir um *heap* de mínimo (ou *min-heap*) considerando que todo nó i diferente da raiz é tal que $A[\lfloor i/2 \rfloor] \leq A[i]$.

    Desta forma, o maior (resp. menor) elemento de um *max-heap* (resp. *min-heap*) é armazenado na raiz, e a subárvore com raiz em um determinado nó contém apenas valores que são menores ou iguais (resp. que são maiores ou iguais) ao valor deste nó.

- O algoritmo Build-Max-Heap

  O algoritmo Heapsort utiliza *max-heaps*, e portanto o primeiro passo do algoritmo será transformar o vetor A em um *max-heap*. Este trabalho é feito pelo algoritmo a seguir:

Algorithm 2: Build-Max-Heap(A)

```
1 A.heap-size ← A.length for i = ⌊A.length/2⌋ downto 1 do
2 |  Max-Heapify(A,i);
3 end
4
```

1. Mostre que na representação vetorial de um *heap* com n elementos, as folhas são os elementos do vetor com índices $\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lfloor n/2 \rfloor + 2, \ldots, n$.

- O algoritmo Max-Heapify

O algoritmo Build-Max-Heap constrói o *max-heap* de baixo para cima a partir do primeiro vértice que não é uma folha, e o algoritmo Max-Heapify(A,i) reconstrói um *max-heap* a partir de uma árvore cuja raiz $A[i]$ seja o único elemento que precise ser reposicionado, ou seja, as subárvores com raiz $A[2i]$ e $A[2i+1]$ já são *max-heaps*:

Algorithm 3: Max-Heapify(A,i)

```
1  l ← 2i;
2  r ← 2i + 1;
3  if l ≤ A.heap-size and A[l] > A[i] then
4  |  largest ← l;
5  end
6  else
7  |  largest ← i;
8  end
9  if r ≤ A.heap-size and A[r] > A[largest] then
10 |  largest ← r;
11 end
12 if largest ≠ i then
13 |  exchange A[i] with A[largest];
14 |  Max-Heapify(A,largest);
15 end
```

– Complexidade de Max-Heapify

1. Mostre que, em um *heap* com n elementos e raiz $A[i]$, cada uma das subárvores com raiz em $2i$ e $2i+1$ têm, no máximo, $2n/3$ elementos.

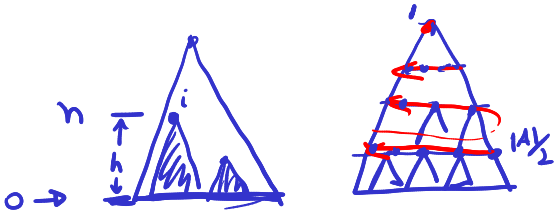
Considerando o fato estabelecido no exercício anterior, temos que o tempo de execução de Max-Heapify é dado pela recorrência

$$T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1) \tag{1}$$

que, pelo teorema mestre, tem solução $O(\lg n)$.

Teorema Mestre:
Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente que satisfaz a recorrência
$T(n) = a.T(n/b) + f(n)$, para $n = b^k, k = 1, 2, 3, \ldots$ onde $a \geq 1, b \geq 2$ e $c \geq 0$. Se
$T(1) = c$
$f(n) = \Theta(n^d)$, onde $d \geq 0$, então

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{se } a > b^d \\ \Theta(n^d . \lg n), & \text{se } a = b^d \\ \Theta(n^d), & \text{se } a < b^d \end{cases}$$



– Complexidade de Build-Max-Heap

Algorithm 4: Build-Max-Heap(A)

```
1 A.heap-size = A.length;
2 for i = ⌊A.length/2⌋ downto 1 do
3 |   Max-Heapify(A,i);
4 end
```

$T_{BMH}(n) =$ O custo de Max-Heapify em um nó de altura h é $O(h)$.

Qual o tempo de execução do procedimento Build-Max-Heap(A)? Temos a seguinte cota superior, considerando um *heap* com n elementos: $\sum_{i=1}^{n/2} O(\lg n) = O(\lg n . \sum_{i=1}^{n/2} 1) =$ $O(\lg n.(n/2) = O(n. \lg n)$.

∗ Uma cota mais precisa para Build-Max-Heap
A cota $O(n. \lg n)$, apesar de correta, não é a mais precisa que podemos encontrar. De fato, se observarmos que:

1. A altura de um *heap* contendo n elementos é igual a $\lfloor \lg n \rfloor$.
2. Um *heap* com n elementos possui, no máximo, $\lceil n/2^{h+1} \rceil$ nós com altura h.

$\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$ Uma árvore binária completa de altura h possui $\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$ nós.

Então, observando que Max-Heapify tem complexidade $O(h)$ quando executado em um nó de altura h, concluímos que o tempo de execução de Build-Max-Heap(A \)), assumindo que A possui n elementos, tem a seguinte cota superior: $\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil n/2^{h+1} \rceil \cdot$

$O(h) = O(n. \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil h/2^h \rceil) = O(n)$, pois $\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} h/2^h \leq \sum_{h=0}^{\infty} h/2^h$, que por sua vez converge.

$\lceil z \rceil \leq 2z$

Assim, um *heap* pode ser construído em tempo linear.

$\sum_{i=0}^{h} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{h-1} + 2^h$

– A correção de Build-Max-Heap

$T_{BMH}(n) = \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil \cdot O(h) \leq$

$O\left(\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{n}{2^h} \cdot h \right) = O\left(n \cdot \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h} \right) = O(n)$.

2. $\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^h + 2^{h+1}$

$\left(\sum_{i=0}^{h} 2^i \right) - 1$

$\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} h/2^h \leq \sum_{h=0}^{\infty} h/2^h < \infty$$

Prove a seguinte invariante de laço, e conclua que o algoritmo Build-Max-Heap é correto:

No início de cada iteração do laço **for** (linhas 2-4),
cada nó nas posições $i+1$, $i+2 \ldots$ n é a raiz de um *max-heap*.

- O algoritmo principal

  O algoritmo *heapsort* recebe como argumento um vetor A qualquer contendo $n > 0$ elementos, e inicialmente o transforma em um *max-heap*. Neste momento, sabemos que a raiz do *heap* contém o maior elemento do vetor A, que pode então ser movido para sua posição correta. Em seguida, decrementamos o tamanho do *heap* em uma unidade, e repetimos o processo:

Algorithm 5: Heapsort(A)

```
1 Build-Max-Heap(A);
2 for i = A.length downto 2 do
3 |   exchange A[1] with A[i];
4 |   A.heap-size = A.heap-size - 1;
5 |   Max-Heapify(A,1);
6 end
```

$$T_H(n) = O(n) + \sum_{i=2}^{n} O(\lg n)$$

$$= O(n) + O(n.\lg n) = O(n.\lg n).$$

  - A complexidade de Heapsort

    Algorithm 6: Heapsort(A)

    ```
    1 Build-Max-Heap(A);
    2 for i = A.length downto 2 do
    3 |   exchange A[1] with A[i];
    4 |   A.heap-size = A.heap-size - 1;
    5 |   Max-Heapify(A,1);
    6 end
    ```

    A complexidade de Heapsort(A) no pior caso, se A é um vetor com $n > 0$ elementos, é $O(n) + \sum_{i=2}^{n} O(\lg n) = O(n) + O(\lg n. \sum_{i=2}^{n} 1) = O(n) + O((n-1).\lg n) = O(n.\lg n)$.

  - A correção de Heapsort

    Algorithm 7: Heapsort(A)

    ```
    1 Build-Max-Heap(A);
    2 for i = A.length downto 2 do
    3 |   exchange A[1] with A[i];
    4 |   A.heap-size = A.heap-size - 1;
    5 |   Max-Heapify(A,1);
    6 end
    ```

    Prove a correção do algoritmo *Heapsort* utilizando a seguinte invariante:

No início de cada iteração do laço **for** (linhas 2-6), o subvetor $A[1..i]$ é um *max-heap* que contém os i menores elementos do vetor $A[1..n]$, e o subvetor $A[i+1..n]$ está ordenado e contém os $(n-i)$ maiores elementos do vetor $A[1..n]$.

– Leituras recomendadas

1. Capítulo 6 do livro do Cormen (Introduction to Algorithms);

2. Capítulo 6 do livro do Levitin (Introduction to the Design and Analysis of Algorithms).

Filas de prioridade

Fila de prioridade é uma estrutura de dados que armazena elementos com base na sua prioridade, garantindo que elementos com maior prioridade sejam atendidos primeiro.

Assim, cada elemento aparece associado a um valor que é a sua prioridade.

As operações básicas de uma fila de prioridade são:

1. **remove**: remove o elemento com maior prioridade da fila;

2. **insert**: insere um novo elemento na fila.

- Filas de prioridade em listas

  Podemos construir uma fila de prioridades utilizando listas:

  Em uma lista (qualquer) contendo n elementos,

  – a inserção (na primeira posição) tem complexidade constante: $\Theta(1)$.

  – a remoção de um elemento arbitrário tem complexidade linear já que pode ser necessário percorrer toda a lista: $\Theta(n)$.

  Em uma lista ordenada contendo n elementos,

  – a inserção tem complexidade linear: $\Theta(n)$.

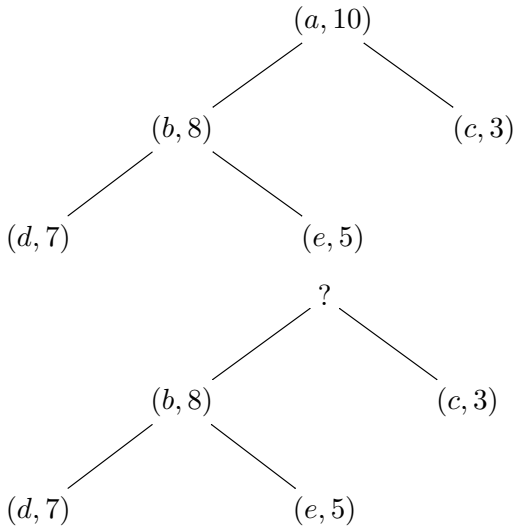
  – a remoção de um elemento arbitrário tem complexidade constante: $\Theta(1)$.

- Filas de prioridade em *heaps*

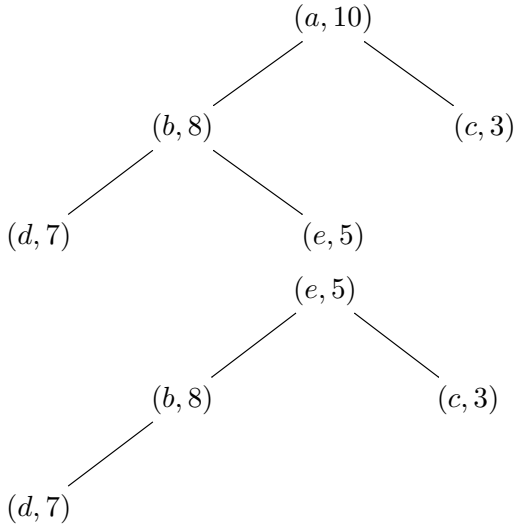
  Uma das principais aplicações da estrutura de *heap* consiste na implementação de filas de prioridade, já que tanto a inserção quanto a remoção podem ser implementados em tempo logarítmico.

  - Remoção

    A remoção do elemento com maior prioridade é feita em tempo constante, mas em seguida o *heap* precisa ser reconstruído via o algoritmo Max-heapify que tem complexidade $\Theta(\lg(n))$.



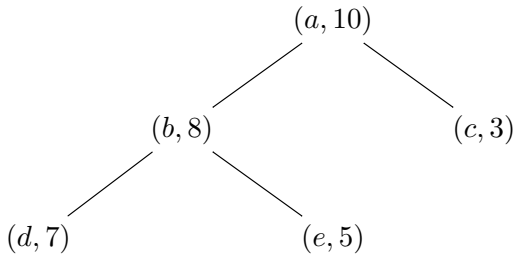
    * remove(A)

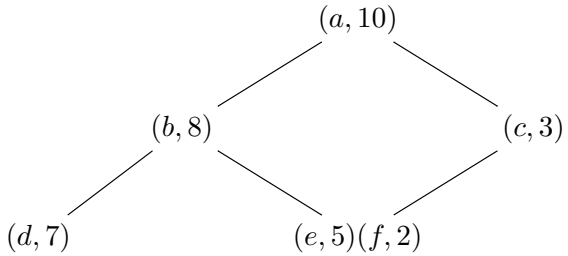


Algorithm 8: remove($A[1..n]$)

```
1 max ← A[1];
2 exchange A[1] with A[n];
3 A.heap-size ← (n − 1);
4 Max-Heapify(A,1);
5 return max;
```

– Inserção





Algorithm 9: insert($(x, y), A[1..n]$)

```
1 A.size ← (n + 1);
2 k ← (n + 1);
3 A[k] ← (x, y);
4 while k > 1 and A[⌊k/2⌋] < A[k] do
5 |   exchange A[⌊k/2⌋] with A[k];
6 |   k ← ⌊k/2⌋;
7 end
```

∗ Exercício
Prove que o algoritmo insert é correto.

Algorithm 10: insert($(x, y), A[1..n]$)

```
1 A.size ← (n + 1);
2 k ← (n + 1);
3 A[k] ← (x, y);
4 while k > 1 and A[⌊k/2⌋] < A[k] do
5 |   exchange A[⌊k/2⌋] with A[k];
6 |   k ← ⌊k/2⌋;
7 end
```

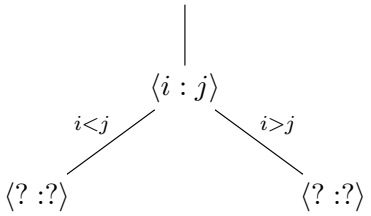
Cota inferior para algoritmos de ordenação baseados na comparação de chaves

Queremos estabelecer uma cota inferior para algoritmos baseados na comparação de chaves. Para facilitar a análise, assumiremos que os elementos a serem ordenados são **distintos**. A execução de um algoritmo qualquer de ordenação pode ser simulada por meio de uma árvore binária, chamada de **árvore de decisão**.

Considere o vetor $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ que queremos ordenar. Cada nó da árvore de decisão tem duas formas possíveis:

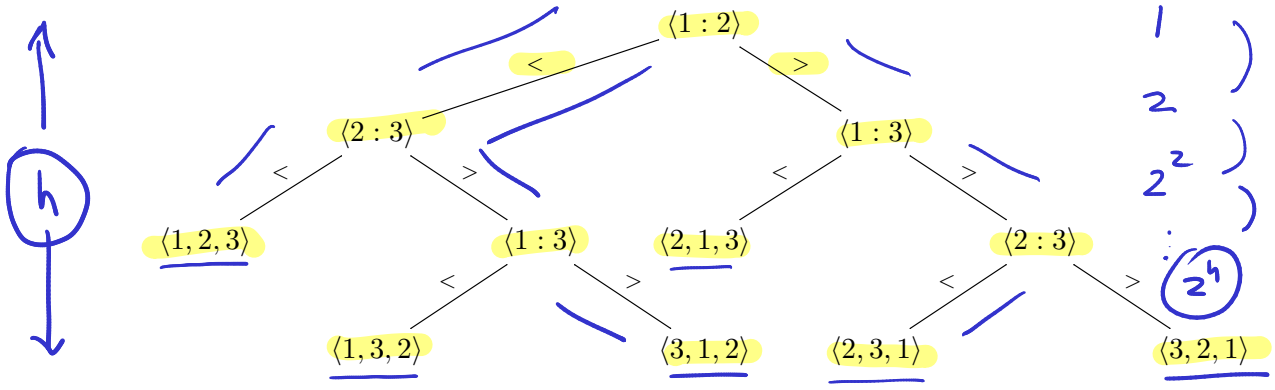
1. Uma folha da forma $\langle i_1, i_2, \ldots, i_n \rangle$ indicando que a ordenação foi finalizada, e neste caso, o vetor ordenado é $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}]$ que corresponde a uma permutação do vetor original $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

2. Um nó interno $\langle i : j \rangle$ que corresponde à operação que compara x_i com x_j. Neste caso, este nó tem dois filhos:



Exemplo

Por exemplo, a árvore de decisão para o algoritmo *insertion sort* em um vetor com 3 elementos tem a seguinte forma:



$|A| = n$

$n! \leq \ell \leq 2^h \Rightarrow 2^h \geq n! \Rightarrow h \geq \lg(n!) \stackrel{?}{=} \Theta(n \cdot \lg n)$.

Conclusões

O primeiro ponto a ser observado é que a árvore de decisão de um algoritmo correto deve conter pelo menos $n!$ folhas, uma para cada possível permutação da entrada. De fato, se alguma permutação não puder ser gerada, então o algoritmo pode falhar para esta permutação.

O número de nós internos em um caminho da raiz até uma folha da árvore de decisão corresponde ao número de comparações realizadas pelo algoritmo. Assim, o caminho mais longo da raiz até uma folha (altura da árvore) nos fornece o comportamento do algoritmo no pior caso.

Sabemos que uma árvore binária de altura h possui, no máximo, 2^h folhas (árvore binária completa).

Então, o número de folhas da árvore de decisão, digamos l, tem que ser pelo menos $n!$, e no máximo, 2^h.

$n! \leq l \leq 2^h \Longrightarrow h \geq \lg(n!) = \Theta(n.\lg(n)))$

$\lg(n!) = \lg(n.(n-1)\dots 2.1) = \lg(n) + \lg(n-1) + \dots + \lg 2 + \lg 1$

$= \sum_{i=1}^{n} \lg i \leq \lg n + \lg n + \dots + \lg n + \lg n =$

$n.\lg n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lg i = O(n.\lg n).$

Exercícios:

1. Mostre que $\lg(n!) = O(n.\lg(n))$
2. Mostre que $\lg(n!) = \Omega(n.\lg(n))$
3. Como você ordenaria um vetor finito contendo apenas 0s e 1s? Qual a complexidade da sua solução?

$\sum_{i=1}^{n} \lg i \geq \lg n + \lg(n-1) + \dots + \lg(n/2) \geq$

$\lg n/2 + \lg n/2 + \dots + \lg(n/2) = \frac{n}{2} \cdot \lg(n/2)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lg i = \Omega(n.\lg n).$

Ordenação em tempo linear

Nesta seção veremos uma outra forma de ordenação baseada na ideia de contagem. O que precisamos fazer é contar, para cada elemento a ser ordenado, o número total de elementos que são menores do que ele e guardar este resultado em uma tabela. Os valores da tabela indicarão a posição dos elementos na lista ordenada. Por exemplo, se existem 6 elementos menores do que o elemento x, então x deve ser colocado na sétima posição do vetor ordenado. Desta forma podemos ordenar um vetor simplesmente deslocando os elementos para a posição correta. O pseudocódigo a seguir implementa esta ideia:

Qual é a complexidade desta abordagem? Que vantagens/desvantagens você pode apresentar?

Algorithm 11: comparison-counting-sort($A[0..n-1]$)

```
1  let C[0..n − 1] be a new array;
2  for i = 0 to n − 1 do
3  |  C[i] ← 0;
4  end
5  for i = 0 to n − 2 do
6  |  for j = i + 1 to n − 1 do
7  |  |  if A[i] < A[j] then
8  |  |  |  C[j] ← C[j] + 1;
9  |  |  end
10 |  |  else
11 |  |  |  C[i] ← C[i] + 1;
12 |  |  end
13 |  end
14 end
15 for i = 0 to n − 1 do
16 |  B[C[i]] ← A[i];
17 end
18 return B;
```

Intervalo conhecido

No entanto, podemos utilizar a ideia da contagem de forma mais eficiente se os elementos a serem ordenados forem "conhecidos".

Por exemplo, se o vetor a ser ordenado contém apenas 0s e 1s então podemos utilizar esta informação para fazer a ordenação sem a necessidade de fazer comparações porque com uma única passagem sobre o vetor podemos obter o número k de 0s, e assim retornar o vetor contendo 0s da posição 0 até $k-1$, e 1s da posição k em diante.

De uma forma mais geral, se os elementos a serem ordenados são inteiros entre l e h então podemos computar a frequência de cada um destes elementos, e armazená-las em um vetor, digamos $C[0..h-l]$, de forma que as primeiras $C[0]$ posições do vetor ordenado serão preenchidas com l, as $C[1]$ posições seguintes com $l+1$, e assim por diante.

Observe que se os elementos do vetor original não puderem ser sobrescritos então precisaremos de um novo vetor (espaço adicional) para escrever o vetor ordenado.

Counting sort

O pseudocódigo a seguir, assume que cada um dos n inteiros a serem ordenados estão no intervalo entre l e h.

Algorithm 12: counting-sort($A[0..n-1], l, h$)

```
1  let C[0..h − l] be a new array;
2  for i = 0 to h − l do
3  |  C[i] ← 0;
4  end
5  for i = 0 to n − 1 do
6  |  C[A[i] − l] ← C[A[i] − l] + 1;
7  end
8  for j = 1 to h − l do
9  |  C[j] ← C[j] + C[j − 1];
10 end
11 for i = n − 1 downto 0 do
12 |  j ← A[i] − l;
13 |  B[C[j] − 1] ← A[i];
14 |  C[j] ← C[j] − 1;
15 end
16 return B;
```

Qual é a complexidade deste algoritmo?

Por simplicidade denotaremos $k = h - l$, ou seja, k denota o tamanho do intervalo que contém os elementos a serem ordenado. Assim, o laço **for** das linhas 2-4 é executado em tempo $\Theta(k)$, o laço das linhas 5-7 em tempo $\Theta(n)$, o laço das linhas 8-10 em tempo $\Theta(k)$, e por fim o laço das linhas 11-14 em tempo $\Theta(n)$, o que perfaz um total de $\Theta(n + k)$. Assumindo que $k = O(n)$, temos que o tempo de execução de counting-sort é $\Theta(n)$.

Radix Sort

O algoritmo radix sort ordena uma sequência de inteiros com d dígitos cada, em tempo linear. Ele utiliza um algoritmo auxiliar, que precisa ser estável, para ordenar a sequência de inteiros do dígito menos significativo para o mais significativo. Podemos utilizar counting-sort, por exemplo, como algoritmo auxiliar.

Algorithm 13: radix-sort(A, d)

```
1  for i = 1 to d do
2  |  use a stable sort algorithm to sort array A on digit i;
3  end
```

Teorema

Dados n números com d dígitos, que por sua vez podem assumir até k valores, radix-sort ordena corretamente
estes números em tempo $\Theta(d.(n + k))$, se o algoritmo auxiliar estável tem complexidade de tempo $\Theta(n + k)$.

Definição
Um algoritmo de ordenação é dito *estável* se não altera a posição relativa dos elementos que têm o mesmo valor.

Exercício
Prove que o algoritmo counting-sort é estável.

Exercício
Prove que o algoritmo *mergesort* é estável.

Exercício
Prove que o algoritmo *insertion sort* é estável.

Exercício
Mostre como podemos ordenar n inteiros contidos no intervalo de 0 a $n^2 - 1$ em tempo linear, ou seja, em $O(n)$.