

Exercício 1.9. Sejam $f(n)$, $g(n)$ e $h(n)$ funções dos inteiros não-negativos nos reais positivos. Mostre que se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ então $f(n) = O(h(n))$.

Como $f(n) = O(g(n))$ então existem constantes positivas c_1 e n_1 tais que $f(n) \leq c_1 \cdot g(n), \forall n \geq n_1$ (*)

Adicionalmente, como $g(n) = O(h(n))$ então existem constantes positivas c_2 e n_2 tais que $g(n) \leq c_2 \cdot h(n), \forall n \geq n_2$ (**)

Queremos mostrar que $f(n) = O(h(n))$, ou seja, precisamos mostrar que existem constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \leq c \cdot h(n), \forall n \geq n_0$.

$$\begin{aligned} \text{De (*) } f(n) &\leq c_1 \cdot g(n), \forall n \geq n_1 \\ \text{(**) } g(n) &\leq c_2 \cdot h(n), \forall n \geq n_2 \end{aligned}$$

Seja $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} f(n) &\leq c_1 \cdot g(n), \forall n \geq n_0 \\ g(n) &\leq c_2 \cdot h(n), \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

e portanto, $f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \leq c_1 \cdot c_2 \cdot h(n), \forall n \geq n_0$.

Tome $c = c_1 \cdot c_2$ então $f(n) \leq c \cdot h(n), \forall n \geq n_0$, ou seja $f(n) = O(h(n))$. QED

Projeto e Análise de Algoritmos (2025-1)

Flávio L. C. de Moura*

30 de abril de 2025

1 O algoritmo *mergesort*

Algoritmos recursivos desempenham um papel fundamental em Computação. O algoritmo de ordenação *mergesort* é um exemplo de algoritmo recursivo, que se caracteriza por dividir o problema original em subproblemas que, por sua vez, são resolvidos recursivamente. As soluções dos subproblemas são então combinadas para gerar uma solução para o problema original. Este paradigma de projeto de algoritmo é conhecido com *divisão e conquista*. Este algoritmo foi inventado por J. von Neumann em 1945.

O algoritmo *mergesort* é um algoritmo de ordenação que utiliza a técnica de divisão e conquista, que consiste das seguintes etapas:

1. **Divisão:** O algoritmo divide a lista (ou vetor) l recebida como argumento ao meio, obtendo as listas l_1 e l_2 ;
2. **Conquista:** O algoritmo é aplicado recursivamente às listas l_1 e l_2 gerando, respectivamente, as listas ordenadas l'_1 e l'_2 ;
3. **Combinação:** O algoritmo combina as listas l'_1 e l'_2 através da função *merge* que então gera a saída do algoritmo.

Por exemplo, ao receber a lista $(4 :: 2 :: 1 :: 3 :: nil)$, este algoritmo inicialmente divide esta lista em duas sublistas, a saber $(4 :: 2 :: nil)$ e $(1 :: 3 :: nil)$. O algoritmo é aplicado recursivamente às duas sublistas para ordená-las, e ao final deste processo, teremos duas listas ordenadas $(2 :: 4 :: nil)$ e $(1 :: 3 :: nil)$. Estas listas são, então, combinadas para gerar a lista de saída $(1 :: 2 :: 3 :: 4 :: nil)$.

*flaviomoura@unb.br

Algorithm 1: mergesort(A, p, r)

```
1 if  $p < r$  then
2    $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$ ;
3   mergesort( $A, p, q$ );
4   mergesort( $A, q + 1, r$ );
5   merge( $A, p, q, r$ ); ←
6 end
```

A etapa de combinar dois vetores ordenados (algoritmo *merge*) é a etapa principal do algoritmo *mergesort*. O procedimento *merge*(A, p, q, r) descrito a seguir recebe como argumentos o vetor A , e os índices p, q e r tais que $p \leq q < r$. O procedimento assume que os subvetores $A[p..q]$ e $A[q + 1..r]$ estão ordenados.

Algorithm 2: merge(A, p, q, r)

 $A[1..n]$

```
1  $n_1 = q - p + 1$  ; // Qtd. de elementos em  $A[p..q]$ 
2  $n_2 = r - q$  ; // Qtd. de elementos em  $A[q + 1..r]$ 
3 let  $L[1..n_1 + 1]$  and  $R[1..n_2 + 1]$  be new arrays;
4 for  $i = 1$  to  $n_1$  do
5    $L[i] = A[p + i - 1]$ ;
6 end
7 for  $j = 1$  to  $n_2$  do
8    $R[j] = A[q + j]$ ;
9 end
10  $L[n_1 + 1] = \infty$ ;
11  $R[n_2 + 1] = \infty$ ;
12  $i = 1$ ;
13  $j = 1$ ;
14 for  $k = p$  to  $r$  do
15   if  $L[i] \leq R[j]$  then
16      $A[k] = L[i]$ ;
17      $i = i + 1$ ;
18   end
19   else
20      $A[k] = R[j]$ ;
21      $j = j + 1$ ;
22   end
23 end
```

(1.1) Invariante: Antes de cada execução do loop FOR (linhas 14-23), o subvetor $A[p..k-1]$ está ordenado ?
 $n = r - p + 1$
(1.3) $T(n) = \sum_{i=1}^n 1 = n = \Theta(n)$.

Exercício 1.1. Prove que o algoritmo *merge* é correto.

Exercício 1.2. Prove que o algoritmo *mergesort* é correto.

Exercício 1.3. Faça a análise assintótica do algoritmo *merge*.

↖

At the start of each iteration of the **for** loop of lines 12–17, the subarray $A[p..k-1]$ contains the $k-p$ smallest elements of $L[1..n_1+1]$ and $R[1..n_2+1]$, in sorted order. Moreover, $L[i]$ and $R[j]$ are the smallest elements of their arrays that have not been copied back into A .

We must show that this loop invariant holds prior to the first iteration of the **for** loop of lines 12–17, that each iteration of the loop maintains the invariant, and that the invariant provides a useful property to show correctness when the loop terminates.

Initialization: Prior to the first iteration of the loop, we have $k = p$, so that the subarray $A[p..k-1]$ is empty. This empty subarray contains the $k-p = 0$ smallest elements of L and R , and since $i = j = 1$, both $L[i]$ and $R[j]$ are the smallest elements of their arrays that have not been copied back into A .

Maintenance: To see that each iteration maintains the loop invariant, let us first suppose that $L[i] \leq R[j]$. Then $L[i]$ is the smallest element not yet copied back into A . Because $A[p..k-1]$ contains the $k-p$ smallest elements, after line 14 copies $L[i]$ into $A[k]$, the subarray $A[p..k]$ will contain the $k-p+1$ smallest elements. Incrementing k (in the **for** loop update) and i (in line 15) reestablishes the loop invariant for the next iteration. If instead $L[i] > R[j]$, then lines 16–17 perform the appropriate action to maintain the loop invariant.

Termination: At termination, $k = r + 1$. By the loop invariant, the subarray $A[p..k-1]$, which is $A[p..r]$, contains the $k-p = r-p+1$ smallest elements of $L[1..n_1+1]$ and $R[1..n_2+1]$, in sorted order. The arrays L and R together contain $n_1 + n_2 + 2 = r - p + 3$ elements. All but the two largest have been copied back into A , and these two largest elements are the sentinels.

Exercício 1.4. Faça a análise assintótica do algoritmo mergesort.

Equações de recorrência

Nesta seção estudaremos as equações de recorrência utilizadas no paradigma de divisão de conquista [2]:

Definição 1.5. Seja $f(n)$ uma função não-negativa definida no conjunto dos números naturais. Dizemos que $f(n)$ é eventualmente não-decrescente se existir um número inteiro n_0 tal que $f(n)$ é não-decrescente no intervalo $[n_0, \infty)$, ou seja,

$$f(n_1) \leq f(n_2), \forall n_2 > n_1 \geq n_0.$$

Definição 1.6. Seja $f(n)$ uma função não-negativa definida no conjunto dos números naturais. Dizemos que $f(n)$ é suave se for eventualmente não-decrescente e

$$f(2n) = \Theta(f(n))$$

Exemplo 1: $f(n) = n$ é suave.

De fato, $2n = \Theta(n)$. ✓

$$\exists c_1, c_2, n_0 : c_1 n \leq 2n \leq c_2 n, \forall n \geq n_0.$$

Teorema 1.7. Sejam $f(n)$ uma função suave, c e n_0 constantes positivas. Se $f(2n) \leq c \cdot f(n), \forall n \geq n_0$ então $f(2^k n) \leq c^k \cdot f(n), \forall n \geq n_0$ e $k \geq 1$.

Exemplo 2: $f(n) = \lg n$ é suave.

De fato, $f(2n) = \lg(2n) = \Theta(\lg n)$.

$$\lg 2 + \lg n = \Theta(\lg n).$$

Teorema 1.8. Seja $f(n)$ uma função suave. Então para qualquer $b \geq 2$ fixado,

$$f(bn) = \Theta(f(n))$$

O teorema a seguir é conhecido como *regra da suavização*

Teorema 1.9. Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente, e $f(n)$ uma função suave. Se $T(n) = \Theta(f(n))$ para valores de n que são potências de b ($b \geq 2$), então

Exemplo 3: 2^n não é suave.

$$\text{ou } 2^{(2^n)} \neq \Theta(2^n)$$

$$\parallel 4^n$$

MERGE: $f(n) = n \cdot \lg n$

$$f(2n) = \Theta(f(n)).$$

$$f(2n) = 2n \cdot \lg(2n) = 2n \cdot (\lg 2 + \lg n) = 2 \cdot \lg 2 \cdot n + 2 \cdot n \cdot \lg n = \Theta(n \cdot \lg n)$$

A regra da suavização nos permite expandir a informação sobre a ordem de crescimento estabelecida para $T(n)$ de um subconjunto de valores (potências de b) para o domínio inteiro. O teorema a seguir é um resultado muito útil nesta direção conhecido como *teorema mestre*:

Teorema 1.7. Sejam $f(n)$ uma função suave, c e n_0 constantes positivas. Se $f(2n) \leq c \cdot f(n), \forall n \geq n_0$ então $f(2^k n) \leq c^k \cdot f(n), \forall n \geq n_0$ e $k \geq 1$.

Prove: Indução em k .

(Base) $k=1$: Trivial.

(Passo) $k > 1$: $f(2^k \cdot n) = f(2 \cdot (2^{k-1} \cdot n)) \stackrel{\text{h.p.}}{\leq} c \cdot f(2^{k-1} \cdot n) \stackrel{\text{h.i.}}{\leq} c \cdot c^{k-1} \cdot f(n) = c^k \cdot f(n)$. □

Teorema 1.8. Seja $f(n)$ uma função suave. Então para qualquer $b \geq 2$ fixado,

$$f(b \cdot n) = \Theta(f(n))$$

Prova: Como $f(n)$ é suave, temos $f(2 \cdot n) = \Theta(f(n))$. (*)

Mostraremos que $f(b \cdot n) = O(f(n))$, e fica como exercício mostrar que $f(b \cdot n) = \Omega(f(n))$. Assim, precisamos mostrar que existem constantes positivas c e n_0 tais que $f(b \cdot n) \leq c \cdot f(n), \forall n \geq n_0$.

Sabemos que para qualquer $b \geq 2$, existe $K \geq 0$ tal que $2^K \leq b < 2^{K+1}$.

Assim $b < 2^{K+1} \Rightarrow \underbrace{b \cdot n < 2^{K+1} \cdot n}_{f \text{ é eventualmente não-decrescente}} \Rightarrow \exists n_0 > 0: f(b \cdot n) \leq f(2^{K+1} \cdot n), \forall n \geq n_0$

De (*) temos que existem constantes positivas c, n_1 tais que $f(2n) \leq c \cdot f(n), \forall n \geq n_1$. Então pelo Teorema 1.7 temos que $f(2^r \cdot n) \leq c^r \cdot f(n), \forall n \geq n_1$ e $r \geq 1$.

$f(b \cdot n) \leq f(2^{K+1} \cdot n) \leq c^{K+1} \cdot f(n), \forall n \geq n_0$. Por fim, tomando $c = c^{K+1}$ e $n_0 > 0$ da def. de event. não-decrescente, temos $f(b \cdot n) = O(f(n))$. □

$$\begin{cases} T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \theta(n) \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

Método da substituição:

Simplificação: $n = 2^k (k > 0) \Rightarrow \begin{cases} T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + \theta(2^k) \\ T(1) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2 \cdot T(2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot (2 \cdot T(2^{k-2}) + c \cdot 2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ &= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + c \cdot 2^k + c \cdot 2^k \\ &= 2^2 \cdot (2 \cdot T(2^{k-3}) + c \cdot 2^{k-2}) + 2 \cdot c \cdot 2^k \\ &= 2^3 \cdot T(2^{k-3}) + 3 \cdot c \cdot 2^k \\ &= \dots \\ &= 2^k \cdot T(2^{k-k}) + k \cdot c \cdot 2^k \\ &= 2^k \cdot T(1) + c \cdot k \cdot 2^k \\ &= c \cdot k \cdot 2^k \end{aligned}$$

✓? ↘

Af. $\begin{cases} T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ T(1) = 0 \end{cases}$ tem $c \cdot k \cdot 2^k$ como Solução.

$$T(2^k) = c \cdot k \cdot 2^k$$

Prova: Indução em k :

BASE ($k=0$): $T(2^0) = c \cdot 0 \cdot 2^0 = 0$. ✓

PASSO ($k > 0$): $T(2^k) \stackrel{\text{def.}}{=} 2 \cdot T(2^{k-1}) + c \cdot 2^k$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{h.i.}}{=} 2 \cdot c \cdot (k-1) \cdot 2^{k-1} + c \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot c \cdot k \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot c \cdot 2^{k-1} + c \cdot 2^k \\ &= c \cdot k \cdot 2^k - \cancel{c \cdot 2^k} + \cancel{c \cdot 2^k} \\ &= c \cdot k \cdot 2^k \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 1.10. *Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente que satisfaz a recorrência $T(n) = a.T(n/b) + f(n)$, para $n = b^k, k = 1, 2, 3, \dots$*

$$T(1) = c$$

onde $a \geq 1, b \geq 2$ e $c \geq 0$. Se $f(n) = \Theta(n^d)$, onde $d \geq 0$, então

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{se } a > b^d \\ \Theta(n^d \cdot \lg n), & \text{se } a = b^d \\ \Theta(n^d), & \text{se } a < b^d \end{cases}$$

Demonstração. Considere que $f(n) = n^d$. Aplicando o método da substituição para a recorrência do teorema, obtemos:

$$T(b^k) = a^k \cdot [T(1) + \sum_{j=1}^k f(b^j)/a^j]$$

Como $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$, podemos reescrever a equação acima como:

$$T(n) = n^{\log_b a} \cdot [T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} f(b^j)/a^j]$$

e para $f(n) = n^d$, temos:

$$T(n) = n^{\log_b a} \cdot [T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} (b^j)^d / a^j] = n^{\log_b a} \cdot [T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} (b^d / a)^j]$$

A soma acima forma uma série geométrica, e portanto:

$$\sum_{j=1}^{\log_b n} (b^d / a)^j = (b^d / a) \frac{(b^d / a)^{\log_b n} - 1}{(b^d / a) - 1}, \text{ se } b^d \neq a.$$

Quando $b^d \neq a$, temos que $\sum_{j=1}^{\log_b n} (b^d / a)^j = \log_b n$. Agora basta analisarmos cada um dos casos: $a < b^d$, $a > b^d$ e $a = b^d$.

□

Apresentaremos agora uma versão um pouco mais geral do teorema mestre[1]. Consideraremos como anteriormente uma recorrência da forma:

$$T(n) = a.T(n/b) + f(n)$$

on $a \geq 1$ e $b > 1$ são constantes, e $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva.

Teorema 1.11. *Sejam $a \geq 1$ e $b \geq 2$ constantes, $f(n)$ uma função assintoticamente positiva, e $T(n)$ definida nos inteiros não-negativos pela recorrência $T(n) = a.T(n/b) + f(n)$, onde n/b deve ser interpretado como $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$. Então $T(n)$ tem as seguintes cotas assintóticas:*

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)$;*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, e se $a.f(n/b) \leq c.f(n)$ para alguma constante $c < 1$, então para todo n suficientemente grande, temos que $T(n) = \Theta(f(n))$.*

A prova será dividida em três lemas, onde inicialmente consideraremos que n é potência de b .

Lema 1.12. *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função não-negativa definida para potências de b . Defina $T(n)$ para potências de b pela recorrência:*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{se } n = 1; \\ a.T(n/b) + f(n), & \text{se } n = b^i \end{cases}$$

onde i é um inteiro positivo. Então

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \cdot f(n/b^j).$$

Demonstração. Analise a árvore de recorrência da equação dada.

□

Em termos da árvore de recorrência, os três casos do teorema mestre correspondem aos casos onde o custo total da árvore é:

1. dominado pelo custo das folhas;

2. uniformemente distribuído ao longo da árvore;
3. dominado pelo custo da raiz.

Lema 1.13. *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função não-negativa definida para potências de b . A função $g(n)$ definida para potências de b por:*

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \cdot f(n/b^j).$$

tem as seguintes cotas assintóticas para potências de b :

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $g(n) = O(n^{\log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)$;*
3. *Se $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então $g(n) = \Theta(f(n))$.*

Demonstração. Exercício.

□

Exercício 1.14. *Resolva as seguintes relações de recorrência:*

1. $T(1) = 1, T(n) = 3T(n/2) + n^2, n \geq 2$
2. $T(1) = 1, T(n) = 2T(n/2) + n, n \geq 2$
3. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 3T(n/3 + 5) + n/2$
4. $T(1) = 1, T(n) = 2T(n-1) + 1, n \geq 2$
5. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 9T(n/3) + n$
6. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = T(2n/3) + 1$

7. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 2T(n/4) + 1$
8. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$
9. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n} \lg^2 n$
10. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 2T(n/4) + n$
11. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 2T(n/4) + n^2$
12. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 3T(n/2) + n \ln(n)$
13. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 3T(n/4) + n \ln(n)$
14. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 2T(n/2) + n \ln(n)$
15. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = 2T(n/2) + n/\ln(n)$
16. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = T(n-1) + 1/n$
17. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = T(n-1) + \ln(n)$
18. $T(1) \in \Theta(1), T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$
19. $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$
20. $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(1)$
21. $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$

Referências

- [1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 4 edition, April 2022.
- [2] A. V. Levitin. *Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, Third Edition*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2012.