Exercício 1.9. *Sejam $f(n), g(n)$ e $h(n)$ funções dos inteiros não-negativos nos reais positivos. Mostre que se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$ então $f(n) = O(h(n))$.*

Como $f(n) = O(g(n))$ então existem constantes positivos c_1 e n_1 tais que $f(n) \leq c_1 \cdot g(n), \forall n \geq n_1$ (*)

Adicionalmente, como $g(n) = O(h(n))$ então existem constantes positivas c_2 e n_2 tais que $g(n) \leq c_2 \cdot h(n), \forall n \geq n_2$ (**)

Queremos mostrar que $f(n) = O(h(n))$, ou seja, precisamos mostrar que existem constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \leq c \cdot h(n), \forall n \geq n_0$.

De (*) $f(n) \leq c_1 g(n), \forall n \geq n_1$

(**) $g(n) \leq c_2 \cdot h(n), \forall n \geq n_2$

Seja $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Neste caso, temos

$f(n) \leq c_1 g(n), \forall n \geq n_0$

$g(n) \leq c_2 \cdot h(n), \forall n \geq n_0$

e portanto, $f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \leq c_1 c_2 \cdot h(n), \forall n \geq n_0$.

Tome $c = c_1 \cdot c_2$ então $f(n) \leq c \cdot h(n), \forall n \geq n_0$, ou seja $f(n) = O(h(n))$.

FIM

Projeto e Análise de Algoritmos (2025-1)

Flávio L. C. de Moura*

30 de abril de 2025

1 O algoritmo *mergesort*

Algoritmos recursivos desempenham um papel fundamental em Computação. O algoritmo de ordenação *mergesort* é um exemplo de algoritmo recursivo, que se caracteriza por dividir o problema original em subproblemas que, por sua vez, são resolvidos recursivamente. As soluções dos subproblema são então combinadas para gerar uma solução para o problema original. Este paradigma de projeto de algoritmo é conhecido com *divisão e conquista*. Este algoritmo foi inventado por J. von Newmann em 1945.

O algoritmo *mergesort* é um algoritmo de ordenação que utiliza a técnica de divisão e conquista, que consiste das seguintes etapas:

1. **Divisão**: O algoritmo divide a lista (ou vetor) l recebida como argumento ao meio, obtendo as listas l_1 e l_2;

2. **Conquista**: O algoritmo é aplicado recursivamente às listas l_1 e l_2 gerando, respectivamente, as listas ordenadas l_1' e l_2';

3. **Combinação**: O algoritmo combina as listas l_1' e l_2' através da função *merge* que então gera a saída do algoritmo.

Por exemplo, ao receber a lista $(4 :: 2 :: 1 :: 3 :: nil)$, este algoritmo inicialmente divide esta lista em duas sublistas, a saber $(4 :: 2 :: nil)$ e $(1 :: 3 :: nil)$. O algoritmo é aplicado recursivamente às duas sublistas para ordená-las, e ao final deste processo, teremos duas listas ordenadas $(2 :: 4 :: nil)$ e $(1 :: 3 :: nil)$. Estas listas são, então, combinadas para gerar a lista de saída $(1 :: 2 :: 3 :: 4 :: nil)$.

*flaviomoura@unb.br

Algorithm 1: mergesort(A, p, r)

```
1  if p < r then
2  |  q = ⌊(p+r)/2⌋;
3  |  mergesort(A, p, q);
4  |  mergesort(A, q + 1, r);
5  |  merge(A, p, q, r);
6  end
```

A etapa de combinar dois vetores ordenados (algoritmo *merge*) é a etapa principal do algoritmo *mergesort*. O procedimento $merge(A, p, q, r)$ descrito a seguir recebe como argumentos o vetor A, e os índices p, q e r tais que $p \leq q < r$. O procedimento assume que os subvetores $A[p..q]$ e $A[q+1..r]$ estão ordenados.

Algorithm 2: merge(A, p, q, r) A[1..n]

```
1  n1 = q − p + 1 ;                          // Qtd. de elementos em A[p..q]
2  n2 = r − q ;                              // Qtd. de elementos em A[q + 1..r]
3  let L[1..n1 + 1] and R[1..n2 + 1] be new arrays;
4  for i = 1 to n1 do
5  |  L[i] = A[p + i − 1];
6  end
7  for j = 1 to n2 do
8  |  R[j] = A[q + j];
9  end
10 L[n1 + 1] = ∞;
11 R[n2 + 1] = ∞;
12 i = 1;
13 j = 1;
14 for k = p to r do
15 |  if L[i] ≤ R[j] then
16 |  |  A[k] = L[i];
17 |  |  i = i + 1;
18 |  end
19 |  else
20 |  |  A[k] = R[j];
21 |  |  j = j + 1;
22 |  end
23 end
```

(1.1) Invariante: Antes de cada execução do laço FOR (linhas 14-23), o subvetor A[p..k-1] está ordenado ....?

n = r-p+1

(1.3) $T(n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n = \Theta(n)$.

Exercício 1.1. *Prove que o algoritmo merge é correto.*

Exercício 1.2. *Prove que o algoritmo mergesort é correto.*

Exercício 1.3. *Faça a análise assintótica do algoritmo merge.*

At the start of each iteration of the **for** loop of lines 12–17, the subarray $A[p..k-1]$ contains the $k-p$ smallest elements of $L[1..n_1+1]$ and $R[1..n_2+1]$, in sorted order. Moreover, $L[i]$ and $R[j]$ are the smallest elements of their arrays that have not been copied back into A.

We must show that this loop invariant holds prior to the first iteration of the **for** loop of lines 12–17, that each iteration of the loop maintains the invariant, and that the invariant provides a useful property to show correctness when the loop terminates.

Initialization: Prior to the first iteration of the loop, we have $k = p$, so that the subarray $A[p..k-1]$ is empty. This empty subarray contains the $k-p=0$ smallest elements of L and R, and since $i = j = 1$, both $L[i]$ and $R[j]$ are the smallest elements of their arrays that have not been copied back into A.

Maintenance: To see that each iteration maintains the loop invariant, let us first suppose that $L[i] \le R[j]$. Then $L[i]$ is the smallest element not yet copied back into A. Because $A[p..k-1]$ contains the $k-p$ smallest elements, after line 14 copies $L[i]$ into $A[k]$, the subarray $A[p..k]$ will contain the $k-p+1$ smallest elements. Incrementing k (in the **for** loop update) and i (in line 15) reestablishes the loop invariant for the next iteration. If instead $L[i] > R[j]$, then lines 16–17 perform the appropriate action to maintain the loop invariant.

Termination: At termination, $k = r+1$. By the loop invariant, the subarray $A[p..k-1]$, which is $A[p..r]$, contains the $k-p = r-p+1$ smallest elements of $L[1..n_1+1]$ and $R[1..n_2+1]$, in sorted order. The arrays L and R together contain $n_1+n_2+2 = r-p+3$ elements. All but the two largest have been copied back into A, and these two largest elements are the sentinels.

Exercício 1.4. *Faça a análise assintótica do algoritmo mergesort.*

Equações de recorrência

Nesta seção estudaremos as equações de recorrência utilizadas no paradigma de divisão de conquista [2]:

Definição 1.5. *Seja $f(n)$ uma função não-negativa definida no conjunto dos números naturais. Dizemos que $f(n)$ é* eventualmente não-decrescente *se existir um número inteiro n_0 tal que $f(n)$ é não-decrescente no intervalo $[n_0, \infty)$, ou seja,*

$$f(n_1) \leq f(n_2), \forall n_2 > n_1 \geq n_0.$$

Definição 1.6. *Seja $f(n)$ uma função não-negativa definida no conjunto dos números naturais. Dizemos que $f(n)$ é* suave *se for eventualmente não-decrescente e*

$$f(2.n) = \Theta(f(n))$$

Exemplo1: $f(n) = n$ é suave.
De fato, $2n = \Theta(n)$. ✓
$\exists c_1, c_2, n_0 : c_2.n \leq 2n \leq c_1.n, \forall n \geq n_0$.

Teorema 1.7. *Sejam $f(n)$ uma função suave, e c e n_0 constantes positivas. Se $f(2n) \leq c.f(n), \forall n \geq n_0$ então $f(2^k n) \leq c^k.f(n), \forall n \geq n_0$ e $k \geq 1$.*

Exemplo2: $f(n) = \lg n$ é suave.
De fato, $f(2n) = \lg(2n) = \Theta(\lg n)$.
$\lg 2 + \lg n = \Theta(\lg n)$.

Teorema 1.8. *Seja $f(n)$ uma função suave. Então para qualquer $b \geq 2$ fixado,*

$$f(b.n) = \Theta(f(n))$$

O teorema a seguir é conhecido como *regra da suavização*

Teorema 1.9. *Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente, e $f(n)$ uma função suave. Se $T(n) = \Theta(f(n))$ para valores de n que são potências de b ($b \geq 2$), então*

$$T(n) = \Theta(f(n)), \forall n.$$

A regra da suavização nos permite expandir a informação sobre a ordem de crescimento estabelecida para $T(n)$ de um subconjunto de valores (potências de b) para o domínio inteiro. O teorema a seguir é um resultado muito útil nesta direção conhecido como *teorema mestre*:

MERGE: $f(n) = n.\lg n$
$f(2n) = \Theta(f(n))$.
$f(2.n) = 2.n.\lg(2.n) = 2.n.(\lg 2 + \lg n) = 2.\lg 2.n + 2.n.\lg n$
$= \Theta(n.\lg n)$

Exemplo3: 2^n não é suave. $2^{(2n)} \neq \Theta(2^n)$
$\| $
4^n

Teorema 1.7. *Sejam $f(n)$ uma função suave, e c e n_0 constantes positivas. Se $f(2n) \leq c.f(n), \forall n \geq n_0$ então $f(2^k n) \leq c^k.f(n), \forall n \geq n_0$ e $k \geq 1$.*

Prova: Indução em k:

(Base) $K = 1$: Trivial.

(Passo) $K > 1$: $f(2^K.n) = f(2.(2^{K-1}.n)) \overset{hip.}{\leq} c.f(2^{K-1}.n) \overset{h.i.}{\leq}$

$c.c^{K-1}.f(n) = c^K.f(n)$. ∎

Teorema 1.8. *Seja $f(n)$ uma função suave. Então para qualquer $b \geq 2$ fixado,*

$$f(b.n) = \Theta(f(n))$$

Prova: Como $f(n)$ é suave, temos $f(2.n) = \Theta(f(n))$. (*)

Mostraremos que $f(bn) = O(f(n))$, e fica como exercício mostrar que $f(bn) = \Omega(f(n))$. Assim, precisamos mostrar que existem constantes positivas c e n_0 tais que $f(b.n) \leq c.f(n), \forall n \geq n_0$.

Sabemos que para qualquer $b \geq 2$, existe $K \geq 0$ tal que $2^K \leq b < 2^{K+1}$.

Assim $b < 2^{K+1} \Rightarrow b.n < 2^{K+1}.n, \forall n > 0$

f é eventualmente não-decrescente $\exists n_0 > 0$:

$f(b.n) \leq f(2^{K+1}.n), \forall n \geq n_0$

De (*) temos que existem constantes positivas c_1 e n_1 tais que $f(2n) \leq c_1.f(n), \forall n \geq n_1$. Então pelo Teorema 1.7 temos que $f(2^r n) \leq c_1^r.f(n), \forall n \geq c_1$ e $r \geq 1$.

$f(b.n) \leq f(2^{K+1}.n) \leq c_1^{K+1}.f(n), \forall n \geq n_0$. Por fim, tomando $c = c_1^{K+1}$ e $n_0 > 0$ da def. de eventualmente não-decrescente, temos $f(b.n) = O(f(n))$. ∎

$$\begin{cases} T(n) = 2 \cdot T(n/2) + \Theta(n) \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

Método da substituição:

Simplificação: $n = 2^k \ (k \geq 0) \Longrightarrow \begin{cases} T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + \Theta(2^k) \\ T(1) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2 \cdot T(2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot (2 \cdot T(2^{k-2}) + c \cdot 2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ &= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + c \cdot 2^k + c \cdot 2^k \\ &= 2^2 \cdot (2 \cdot T(2^{k-3}) + c \cdot 2^{k-2}) + 2 \cdot c \cdot 2^k \\ &= 2^3 \cdot T(2^{k-3}) + 3 \cdot c \cdot 2^k \\ &= \dots \\ &= 2^k \cdot T(2^{k-k}) + k \cdot c \cdot 2^k \\ &= 2^k \cdot T(1) + c \cdot k \cdot 2^k \\ &= c \cdot k \cdot 2^k . \end{aligned}$$

✓ ? ↓

Af. $\begin{cases} T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + c \cdot 2^k \\ T(1) = 0 \end{cases}$ tem $c \cdot k \cdot 2^k$ como solução.

$T(2^k) = c \cdot k \cdot 2^k$.

Prova: Indução em k:

BASE ($k = 0$): $T(2^0) = c \cdot 0 \cdot 2^0 = 0$. ✓

PASSO ($k > 0$): $T(2^k) \overset{\text{def.}}{=} 2 \cdot T(2^{k-1}) + c \cdot 2^k$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{h.i.}}{=} 2 \cdot c \cdot (k-1) \cdot 2^{k-1} + c \cdot 2^k \\ &= 2 \cdot c \cdot k \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot c \cdot 2^{k-1} + c \cdot 2^k \\ &= c \cdot k \cdot 2^k - c \cdot 2^k + c \cdot 2^k \\ &= c \cdot k \cdot 2^k . \end{aligned}$$

□

Teorema 1.9. *Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente, e $f(n)$ uma função suave. Se $T(n) = \Theta(f(n))$ para valores de n que são potências de b ($b \geq 2$), então*

$$T(n) = \Theta(f(n)), \forall n.$$

Prova: Mostraremos que "se $T(n) = O(f(n))$ para valores de n que são potências de $b \geq 2$ então $T(n) = O(f(n))$, $\forall n$."

Como $T(n) = O(f(n))$ então existem constantes positivas c_1 e n_1 tais que $T(n) \leq c_1 . f(n)$, $\forall n \geq n_1$, onde $n = b^k$ ($k \geq 0$).

Para n qualquer, sabemos que existe $r \geq 0$ tal que $b^r \leq n < b^{r+1}$. Como $T(n)$ é eventualmente não-decrescente, existe $n_0 > 0$ tal que $T(n) \leq T(b^{r+1})$, $\forall n \geq n_0$

- como f é suave, e portanto eventualmente não-decrescente existe $n_1 > 0$ tal que $f(b^r) \leq f(n)$, $\forall n \geq n_1$ (*)

$$T(b.b^r) \leq c_1 . f(b.b^r)$$
$$\leq c_1 . c_b . f(b^r), \forall n \geq n_0$$
$$\overset{(*)}{\leq} c_1 . c_b . f(n), \forall n \geq \max(n_0, n_1).$$

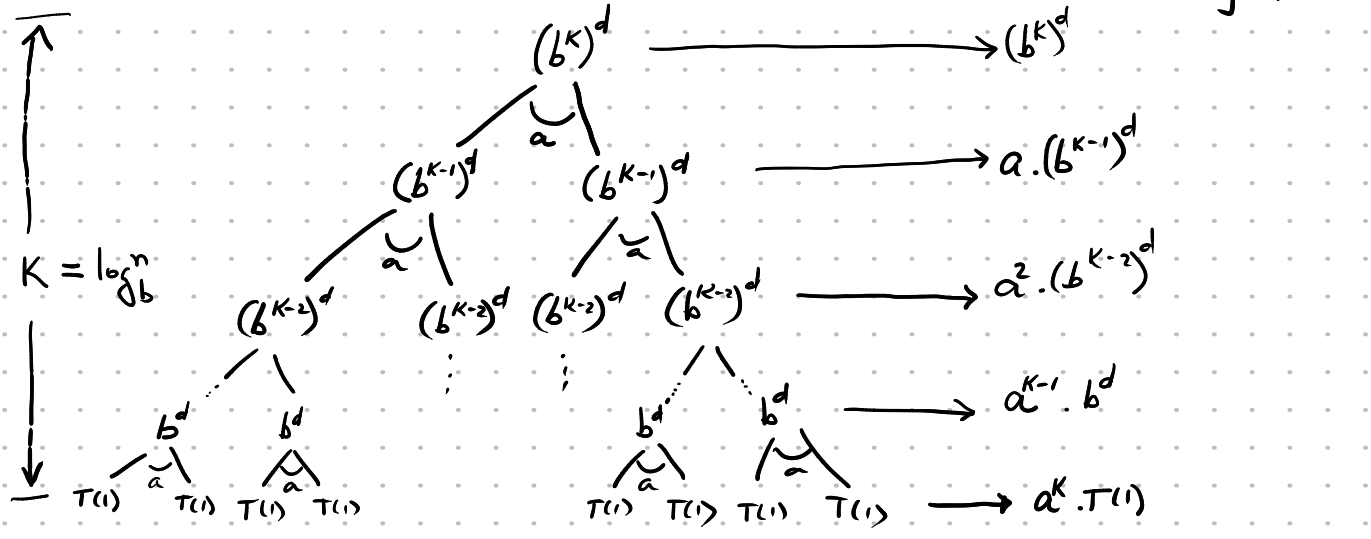
$\rightarrow T(n) = O(f(n))$. ∎

Teorema Mestre

Considere uma recorrência da forma

$T(n) = a . T(n/b) + f(n)$ onde $a > 0$, $b > 1$ e $f(n)$ é assintoticamente positiva. Adicionalmente, suponha que $f(n) = \Theta(n^d)$ ($d \geq 0$) e que $n = b^k$ ($k > 0$). Assim,

$T(b^k) = a . T(b^{k-1}) + (b^k)^d$, ou seja, estamos considerando $f(n) = n^d$.



$$T(b^K) = a^K \cdot T(1) + a^{K-1} \cdot b^d + a^{K-2} \cdot b^{2d} + \dots + a^2 (b^{K-2})^d + a (b^{K-1})^d$$

$$= a^K \cdot \left[T(1) + b^d/a + (b^d/a)^2 + \dots + (b^d/a)^{K-2} + (b^d/a)^{K-1} \right]$$

$$= a^K \cdot \left[T(1) + \sum_{j=1}^{K-1} (b^d/a)^j \right]$$

$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$

$a.S = \underbrace{a + a^2 + a^3 + \dots + a^n}_{S-1} + a^{n+1}$

$a.S = S - 1 + a^{n+1} \Longrightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Se $|a| < 1$ então $\sum_{i=1}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$

$$T(b^K) = a^K \cdot \left[T(1) + \sum_{j=1}^{K-1} (b^d/a)^j \right]$$

- Se $b^d = a$ então $\sum_{j=1}^{K-1} (b^d/a) = \sum_{j=1}^{K-1} 1 = K - 1$

Logo $T(b^K) = a^K \cdot [T(1) + K - 1] = a^K \cdot T(1) + a^K K - a^K$

$T(n) = a^{\log_b^n} \cdot T(1) + a^{\log_b^n} \cdot \log_b^n - a^{\log_b^n}$

$= n^{\log_b^a} \cdot T(1) + n^{\log_b^a} \cdot \log_b^n - n^{\log_b^a} = \Theta(n^{\log_b^a} \cdot \log_b^n)$

$d = \log_b^a$

$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

$\log_b^n = \frac{\log_2^n}{\log_2^b}$

$\Downarrow$

$\Theta(n^d \cdot \lg^n)$

$$\log_b^n = \frac{1}{\log_2^b} \cdot \lg^n$$

• Se $b^d > a$ então $T(b^k) = a^k \cdot \left[T(1) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{b^d}{a}\right)^j \right]$

$$= a^k \cdot \left[T(1) + \frac{\left(\frac{b^d}{a}\right)^k - 1}{\left(\frac{b^d}{a}\right) - 1} \right]$$

$n = b^k$

$$= a^k \cdot \left[T(1) + \frac{1}{\left(\frac{b^d}{a}\right) - 1} \left(\left(\frac{(b^k)^d}{a^k} \right) - 1 \right) \right]$$

$$= \Theta(n^d).$$

• Se $b^d < a$ então $T(b^k) = a^k \cdot \left[T(1) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{b^d}{a}\right)^j \right]$

$$\leq a^k \cdot \left[T(1) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{b^d}{a}\right)^j \right] = a^k \cdot \left[T(1) + \frac{1}{1 - \frac{b^d}{a}} \right]$$

$$= \Theta(n^{\log_b a}).$$

Teorema 1.10. *Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente que satisfaz a recorrência*
$T(n) = a.T(n/b) + f(n), \quad$ *para* $n = b^k, k = 1, 2, 3, \ldots$
$T(1) = c$
onde $a \geq 1, b \geq 2$ *e* $c \geq 0$ *. Se* $f(n) = \Theta(n^d)$*, onde* $d \geq 0$*, então*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & se\ a > b^d \\ \Theta(n^d . \lg n), & se\ a = b^d \\ \Theta(n^d), & se\ a < b^d \end{cases}$$

Demonstração. Considere que $f(n) = n^d$. Aplicando o método da substituição para a recorrência do teorema, obtemos:

$$T(b^k) = a^k.[T(1) + \sum_{j=1}^{k} f(b^j)/a^j]$$

Como $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$, podemos reescrever a equação acima como:

$$T(n) = n^{\log_b a}.[T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} f(b^j)/a^j]$$

e para $f(n) = n^d$, temos:

$$T(n) = n^{\log_b a}.[T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} (b^j)^d/a^j] = n^{\log_b a}.[T(1) + \sum_{j=1}^{\log_b n} (b^d/a)^j]$$

A soma acima forma uma série geométrica, e portanto:

$$\sum_{j=1}^{\log_b n} (b^d/a)^j = (b^d/a)\frac{(b^d/a)^{\log_b n} - 1}{(b^d/a) - 1}, \text{ se } b^d \neq a.$$

Quando $b^d \neq a$, temos que $\sum_{j=1}^{\log_b n} (b^d/a)^j = \log_b n$. Agora basta analisarmos cada um dos casos: $a < b^d$, $a > b^d$ e $a = b^d$.

□

Apresentaremos agora uma versão um pouco mais geral do teorema mestre[1]. Consideraremos como anteriormente uma recorrência da forma:

$$T(n) = a.T(n/b) + f(n)$$

on $a \geq 1$ e $b > 1$ são constantes, e $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva.

Teorema 1.11. *Sejam $a \geq 1$ e $b \geq 2$ constantes, $f(n)$ uma função assintoticamente positiva, e $T(n)$ definida nos inteiros não-negativos pela recorrência $T(n) = a.T(n/b) + f(n)$, onde n/b deve ser interpretado como $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$. Então $T(n)$ tem as seguintes cotas assintóticas:*

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;*

2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}.\lg n)$;*

3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, e se $a.f(n/b) \leq c.f(n)$ para alguma constante $c < 1$, então para todo n suficientemente grande, temos que $T(n) = \Theta(f(n))$.*

A prova será dividida em três lemas, onde inicialmente consideraremos que n é potência de b.

Lema 1.12. *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função não-negativa definida para potências de b. Defina $T(n)$ para potências de b pela recorrência:*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{se } n = 1; \\ a.T(n/b) + f(n), & \text{se } n = b^i \end{cases}$$

onde i é um inteiro positivo. Então

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j.f(n/b^j).$$

Demonstração. Analise a árvore de recorrência da equação dada.

□

Em termos da árvore de recorrência, os três casos do teorema mestre correspondem aos casos onde o custo total da árvore é:

1. dominado pelo custo das folhas;

2. uniformemente distribuído ao longo da árvore;

3. dominado pelo custo da raiz.

Lema 1.13. *Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função não-negativa definida para potências de b. A função $g(n)$ definida para potências de b por:*

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j . f(n/b^j).$$

tem as seguintes cotas assintóticas para potências de b:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $g(n) = O(n^{\log_b a})$;*

2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $g(n) = \Theta(n^{\log_b a} . \lg n)$;*

3. *Se $a.f(n/b) \leq c.f(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então $g(n) = \Theta(f(n))$.*

Demonstração. Exercício.

□

Exercício 1.14. *Resolva as seguintes relações de recorrência:*

1. $T(1) = 1$, $T(n) = 3T(n/2) + n^2$, $n \geq 2$

2. $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(n/2) + n$, $n \geq 2$

3. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 3T(n/3 + 5) + n/2$

4. $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(n-1) + 1$, $n \geq 2$

5. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 9T(n/3) + n$

6. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = T(2n/3) + 1$

7. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 2T(n/4) + 1$

8. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$

9. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}\lg^2 n$

10. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 2T(n/4) + n$

11. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

12. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 3T(n/2) + nln(n)$

13. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 3T(n/4) + nln(n)$

14. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 2T(n/2) + nln(n)$

15. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = 2T(n/2) + n/ln(n)$

16. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = T(n-1) + 1/n$

17. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = T(n-1) + ln(n)$

18. $T(1) \in \Theta(1)$, $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$

19. $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$

20. $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(1)$

21. $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$

Referências

[1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 4 edition, April 2022.

[2] A. V. Levitin. *Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, Third Edition*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2012.