

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Ciência da Computação



UnB

Projeto e Análise de Algoritmos (2026/1)
Segunda Avaliação - Parte discursiva

10 de julho de 2026

Nome: _____

Matrícula: _____

Nome: _____

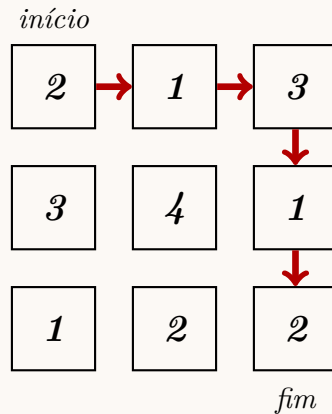
Matrícula: _____

• **Instruções:**

1. Esta avaliação pode ser feita individualmente ou em dupla.
2. Consulta a material próprio impresso é permitida;
 - (a) É proibida a consulta a qualquer meio eletrônico (celular, tablet, computador, etc).
3. Cada item vale 2.5 pontos.
4. Tempo de duração: 19h15–20h40.

Exercício 1. Considera-se uma grade de $m \times n$ células, onde cada célula (i, j) possui um custo inteiro não-negativo $c[i][j]$. O objetivo é encontrar um caminho de custo mínimo do canto superior esquerdo $(1, 1)$ até o canto inferior direito (m, n) . Em cada passo é permitido mover-se apenas para a **direita** ou para **baixo**.

A figura abaixo ilustra uma grade 3×3 . As setas indicam um dos caminhos possíveis.



1. Seja $dp[i][j]$ o custo mínimo para alcançar a célula (i, j) a partir de $(1, 1)$. **Construa** a recorrência para $dp[i][j]$.
2. Com base na recorrência do item anterior, construa uma solução via programação dinâmica e faça a análise assintótica da solução obtida.

Gabarito

1. Recorrência.

A célula (i, j) só pode ser alcançada a partir de $(i - 1, j)$ (de cima) ou de $(i, j - 1)$ (da esquerda). Os casos especiais tratam a primeira linha (só há chegada pela esquerda) e a primeira coluna (só há chegada por cima):

$$dp[i][j] = \begin{cases} c[1][1], & \text{se } i = 1 \text{ e } j = 1 \\ c[1][j] + dp[1][j - 1], & \text{se } i = 1 \text{ e } j > 1 \\ c[i][1] + dp[i - 1][1], & \text{se } j = 1 \text{ e } i > 1 \\ c[i][j] + \min\{dp[i - 1][j], dp[i][j - 1]\}, & \text{se } i > 1 \text{ e } j > 1 \end{cases}$$

O custo mínimo total é $dp[m][n]$. Para o exemplo da figura, a tabela dp resultante é:

2	3	6
5	7	7
6	8	9

O caminho ótimo tem custo 9 e corresponde à sequência $(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3)$, com custos $2 + 1 + 3 + 1 + 2 = 9$.

2. Algoritmo via Programação Dinâmica e análise assintótica.

A tabela dp é preenchida linha por linha, da esquerda para a direita:

```

1  dp[1][1] ← c[1][1];
2  for j = 2 to n do
3    | dp[1][j] ← c[1][j] + dp[1][j - 1];
4  end
5  for i = 2 to m do
6    | dp[i][1] ← c[i][1] + dp[i - 1][1];
7    | for j = 2 to n do
8      | | dp[i][j] ← c[i][j] + min{dp[i - 1][j], dp[i][j - 1]};
9    | end
10 end
11 return dp[m][n];

```

Algoritmo 1: caminho-minimo(c, m, n)

Análise assintótica. A inicialização da primeira linha e da primeira coluna executa $(n - 1) + (m - 1)$ iterações, cada uma em tempo $\Theta(1)$. O laço duplo principal executa $(m - 1)(n - 1)$ iterações, também em tempo $\Theta(1)$ cada. Portanto:

$$T(m, n) = \Theta(n) + \Theta(m) + \Theta((m - 1)(n - 1)) = \Theta(mn).$$

A complexidade de espaço é $\Theta(mn)$ para a tabela dp . (Pode ser reduzida para $\Theta(n)$ mantendo-se apenas a linha anterior, já que $dp[i][j]$ depende somente de $dp[i - 1][j]$ e $dp[i][j - 1]$.)

Exercício 2. Uma cobertura por vértices de um grafo $G = (V, E)$ (não-dirigido) é um subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $(u, v) \in E$ implica que $u \in V'$ ou $v \in V'$ (ou ambos!). O tamanho da cobertura por vértices é o seu número de vértices, ou seja, $|V'|$. O problema da cobertura por vértices consiste em encontrar uma cobertura por vértices de tamanho mínimo em um grafo. Reescrevendo este problema como um problema de decisão, queremos determinar se um grafo G possui uma cobertura por vértices de tamanho k :

$VERTEX-COVER = \{\langle G, k \rangle : G \text{ possui uma cobertura por vértices de tamanho } k\}$

A prova de que $VERTEX-COVER$ é NP-difícil pode ser feita por meio de uma redução polinomial a partir do problema $CLIQUE$, ou seja, via $CLIQUE \leq_p VERTEX-COVER$, que é baseada em uma relação fundamental entre cliques e coberturas por vértices no grafo complementar que pode ser construído em tempo polinomial no tamanho do grafo original. Seja $\bar{G} = (V, \bar{E})$ o grafo complementar de G , onde $\bar{E} = \{(u, v) | u \neq v \text{ e } (u, v) \notin E\}$. **Mostre que G tem um k -clique se, e somente se, $\bar{G}$ tem uma cobertura por vértices de tamanho $|V| - k$. Ou seja, mostre que:**

1. Se G tem um k -clique então $\bar{G}$ tem uma cobertura por vértices de tamanho $|V| - k$.
2. Se $\bar{G}$ tem uma cobertura por vértices de tamanho $|V| - k$ então G tem um k -clique.

Gabarito

- $(\Rightarrow)$ Suponha que C seja um k -clique em G . Então, nenhum par de vértices em C está conectado por uma aresta em $\bar{G}$. Seja $V' = V \setminus C$. O tamanho de V' é $|V| - k$. Para qualquer aresta $(u, v) \in \bar{E}$, pelo menos um dos vértices u ou v deve estar fora de C (pois não há arestas em $\bar{G}$ dentro de C). Portanto,

pelo menos um deles está em V' . Logo, V' é uma cobertura por vértices para $\bar{G}$.

- ($\Leftarrow$) Suponha que V' seja uma cobertura por vértices de tamanho $|V| - k$ em $\bar{G}$. Seja $C = V \setminus V'$. O tamanho de C é k . Para quaisquer dois vértices $u, v \in C$, a aresta (u, v) não pode estar em $\bar{E}$, pois se estivesse, um dos dois teria que estar em V' . Portanto, para todo $u, v \in C$, a aresta (u, v) deve estar em E . Logo, C é um k -clique em G .